EINLEITUNG

IN EINE

GEOMETRISCHE THEORIE

DER

EBENEN CURVEN

VON

DR. LUDWIG CREMONA,

PROFESSOR DER HOEHEREN GEOMETRIE AN DER UNIVERSITAET ZU BOLOGNA.

NACH EINER FÜR DIE DEUTSCHE AUSGABE VOM VERFASZER ZUM TEIL UMGEARBEITETEN REDACTION INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN

VON

MAXIMILIAN CURTZE,

ORDENTLICHEM LEHRER AM KOENIGL. GYMNASIUM ZU THORN.

MIT EINER LITHOGRAPHIERTEN TAFEL.

GREIFSWALD 1865.

C. A. KOCHS VERLAGSBUCHHANDLUNG

TH. KUNIKE.

DEM

ORDENSCOMTHUR UND PROFESSOR

FRANCESCO BRIOSCHI,

DEM ITALIEN IN SO GROSZEM MASZE

DIE FORTSCHRITTE

IN DEN MATHEMATISCHEN WISZENSCHAFTEN

VERDANKT,

WIDMET DIESES WERKCHEN

ALS ZEICHEN DER BEWUNDERUNG, DANKBARKEIT UND FREUNDSCHAFT

SEIN ALTER SCHÜLER

DER VERFASZER.

Vorwort des Herausgebers.

Die nachfolgende Uebersetzung ist vorzugsweise durch die Aufforderung des Herrn Professor *Grunert* im *Archiv der Mathematik und Physik Th. XXXIX Heft 3 Litr. Ber. CLV.* veranlaszt worden, in welchem dieser ausgezeichnete Gelehrte folgendermaszen urteilt:

„Sollten wir nun unser Urtheil in der Kürze noch im All-„gemeinen aussprechen, so würden wir dasselbe in den Wor-„ten zusammenfassen: *dass wir das vorliegende schöne Werk „für ein vortreffliches, sehr vollständiges, in seiner Art jetzt „einzig dastehendes Lehrbuch der rein geometrischen Theorie „der ebenen Curven halten, durch welches ein Jeder in den „Stand gesetzt wird, sich mit Leichtigkeit und grosser Be-„friedigung eine vollständige Kenntniss des betreffenden „Gegenstandes zu verschaffen.* Der Herr Verfasser verdient „für die Publication dieses Werkes jedenfalls den grössten „Dank und *wir würden eine sofortige Uebersetzung dessel-„ben ins Deutsche für ein überaus verdienstliches Unter-„nehmen und eine wahre Bereicherung unserer Literatur „halten.*“

Eine Rücksprache darauf hin mit dem Verleger des Archivs hatte das hier vorliegende Unternehmen zur Folge. Herr Professor *Cremona* erlaubte mit der gröszten Bereitwilligkeit die Uebersetzung des Werkes und hat einige Partien desselben für die deutsche Ausgabe einer nicht unwesentli-

chen Aenderung unterzogen. Diese Aenderungen betreffen die Curvenreihen vom Index *N*. Der Erfinder der Hauptsätze über diese Gebilde, Herr *E. de Jonquières*, Commandant der Fregatte Le Bertolet vor Vera Cruz, hatte nämlich in dem *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane* durch einen Brief an den Herrn Verfasser diese Sätze einer nicht unwichtigen Einschränkung unterworfen, und es konnten eben deshalb diese Teile des Werkes in ihrer ursprünglichen Gestalt nicht bestehen bleiben. Eine Vergleichung mit dem Originale wird am ersten die Wichtigkeit derselben hervortreten laszen. Die am Schlusze beigegebenen *Zusätze und weiteren Ausführungen* sind ebenso die Frucht einer genauen Revision des Werkes durch den Verfaszer und einen befreundeten englischen Mathematiker Dr. *Hirst*. Durch die lange Verzögerung des Druckes ist es auch möglich geworden, im Haupttexte die neuesten Publicationen des Herrn Professor *Chasles* zu Paris und andere neuere Arbeiten benutzen zu können, und dadurch teilweise Verbeszerungen anzubringen.

Im Uebrigen ist das vorliegende Werk eine treue Uebersetzung des Originals mit einigen wenigen, der Consequenz wegen eingeführten und vom Autor gebilligten Aenderungen der Bezeichnung. Wo z. B. in dieser Uebersetzung die Schwabacher Schrift zur Anwendung gekommen, hat das Original grosze lateinische Buchstaben gewählt. Da aber in den übrigen Partien diese Buchstabengattung nur Linien, nie Puncte bezeichnete, so hielt ich mich zu dieser Vertauschung für ebenso berechtigt, als verpflichtet. Aus dem gleichen Grunde habe ich für die Coefficienten überall, wo sie im Originale nicht zur Anwendung gekommen, griechische kleine Buchstaben einzuführen mir erlaubt.

Die Orthographie mag Manchem anstöszig sein. Ich hatte die Absicht, dieselbe in die gewöhnliche umzuändern, als mir von den beiden ersten Bogen die Aushängebogen zukamen, und ich also ohne grosze Opfer des Verlegers eine Aenderung in dieser Beziehung nicht mehr ausführen konnte.

Schlieszlich sage ich noch dem Herrn Professor *Grunert*, der mir mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit die Benutzung seines Dedicationsexemplars des Originals für die Uebersetzung gestattete, sowie dem Herrn Stud. math. *Thiel* zu Greifswald, der von dem vierten Bogen an die ersten Correcturen besorgt hat, und der Verlagshandlung für die Bereitwilligkeit, mit der sie meine Wünsche in Betreff der Ausstattung genehmigte, hiermit meinen aufrichtigen Dank.

Thorn im September 1864.

Der Uebersetzer.

Vorrede des Verfaszers.

„Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, generaliser et créer en géométrie: le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice."
[*Chasles*, *Aperçu historique*, *p.* 269.]

Der Wunsch, durch rein geometrische Methoden die Beweise der so wichtigen Sätze zu finden, welche der berühmte *Steiner* in seiner kurzen Abhandlung „*Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven*" (*Crelle*, T. 47) ausgesprochen hat, liesz mich Untersuchungen anstellen, von denen ich hier eine, wenn auch unvollständige Probe gebe. Aus einigen wenigen Eigenschaften eines Systems von Puncten in gerader Linie habe ich die Theorie der *Polaren* in Bezug auf eine Curve von beliebiger Ordnung abgeleitet, eine Theorie, die sich mir so fast von selbst darbot und sich so reich an Folgerungen zeigte, dasz ich mich überzeugt halten muszte, in ihr die in Wahrheit natürlichste Methode für die Untersuchung der ebenen Curven erhalten zu haben. Der einsichtsvolle Leser wird beurtheilen können, in wie weit ich mich auf das Wahre gestützt habe.

Der Teil meiner Untersuchungen, den ich hiermit veröffentliche, ist in drei Abschnitte geteilt. Der erste derselben liefert an sich nicht viel Neues, aber ich glaubte, dasz es, auszer der Darlegung der Fundamentallehren, die im Wesentlichen die Methode, deren ich mich im Folgenden

bediene, ausmachen, dasz es da, sage ich, nicht ohne Nutzen sein würde, die wesentlichsten Eigenschaften in Bezug auf die Durchschnittspuncte und die Beschreibung der Curven zusammen zu stellen, damit der junge Leser Alles, was zum Verständnisz meiner Arbeit nötig ist, hier selbst vorfinde.

Der Theorie der Polaren ist der zweite Abschnitt gewidmet. In ihm entwickle und beweise ich mit einfachen, und gleichmäszigen geometrischen Methoden nicht allein die Sätze *Steiners*, die er ohne Beweis ausgesprochen hat, sondern auch eine bedeutende Zahl anderer, teils neuer, teils schon von den berühmten Geometern *Plücker*, *Cayley*, *Hesse*, *Clebsch*, *Salmon* und Anderen mit Hilfe der algebraischen Analyse bewiesener Sätze.

In dem letzten Abschnitt endlich wende ich die allgemeine Theorie auf die Curven dritter Ordnung an.

Auszer den Werken der oben genannten Geometer habe ich noch die von *Maclaurin*, *Carnot*, *Poncelet*, *Chasles*, *Bobillier*, *Möbius*, *Jonquières*, *Bischoff* u. A. benutzt, deren Studium ich das, was etwa an meiner Arbeit Gutes sein sollte, zuschreiben musz. Sehr würde es mich freuen, wenn dieselbe in Etwas dazu beitragen könnte in Italien die Liebe zu den Betrachtungen der rationellen Geometrie immer mehr zu verbreiten.

Inhaltsverzeichnisz.

Zweites Capitel. Theorie der Polaren.

Drittes Capitel. Curven dritter Ordnung.

Seite.

Erstes Capitel.

Die Grundprinzipien.

Die Grundprincipien.

§. 1.

Das anharmonische oder das Doppelverhältnisz.

1. Doppelverhältnisz von vier Puncten. Es seien in gerader Linie vier Puncte a, b, c, d gegeben. Die beiden Puncte a und b bestimmen in Bezug auf den Punct c zwei Abschnitte; das Verhältnisz derselben ist ausgedrückt durch $\frac{ac}{cb}$. In Bezug auf den Punct d entstehen ebenso zwei Abschnitte, deren Verhältnisz in ähnlicher Weise durch $\frac{ad}{db}$ ausgedrückt wird. Den Quotient dieser beiden Verhältnisze:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db}$$

nennt man das *anharmonische**) oder *Doppelverhältnisz* der vier Puncte a, b, c, d und bezeichnet dasselbe durch das Symbol $(abcd)$**). Durch Vertauschung der Reihenfolge, in welcher die gegebenen Puncte betrachtet werden, entstehen vierundzwanzig Doppelverhältnisze, ebensoviel als die Permutationszahl von vier Elementen beträgt. Es ist aber:

---

*) *Chasles*, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des methodes en géométrie* (présenté à l'Academie de Bruxelles en janvier 1830). Bruxelles 1837, p. 34. — Deutsch von *Sohnke*, Halle, Gebauersche Buchhandlung. 1839.

**) *Möbius*, *der barycentrische Calcul*, Leipzig, Barth. 1827. S. 244 ff. — *Witzschel*, *Grundlinien der neueren Geometrie*, Leipzig, Teubner. 1858. S. 21 ff.

$$\frac{ac}{cb}:\frac{ad}{db}=\frac{bd}{da}:\frac{bc}{ca}=\frac{ca}{ad}:\frac{cb}{bd}=\frac{db}{bc}:\frac{da}{ac},$$

das heiszt:

$$(abcd)=(badc)=(cdab)=(dcab),$$

so dasz von diesen vierundzwanzig Doppelverhältniszen je vier einander gleich, und daher nur sechs unter ihnen wesentlich von einander verschieden sind. Dies sind die folgenden:

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases}(abcd),\ (acdb),\ (adbc),\\ (abdc),\ (acbd),\ (adcb).\end{cases}$$

Nun ist:

$$\left(\frac{ac}{cb}:\frac{ad}{db}\right)\left(\frac{ad}{db}:\frac{ac}{cb}\right)=1,$$

oder in anderer Bezeichnung:

$$(abcd)(abdc)=1,$$

und dem analog:

$$(acdb)(acbd)=1,$$
$$(adbc)(adcb)=1,$$

das heiszt, die Doppelverhältnisze (1) sind je zwei und zwei, wie sie untereinander stehen, reciprok, in der Art, dasz, sobald wir die drei Verhältnisze

$$(abcd),\ (acdb),\ (adbc)$$

als die *Grundverhältnisse* betrachten, die drei übrigen ihre reciproken Werte darstellen.

Für jede vier Puncte a, b, c, d in gerader Linie ist bekanntlich die Gleichung

$$bc.ad+ca.bd+ab.cd=0$$

erfüllt, aus der durch Division mit $bc.ad$

$$\frac{ca}{bc}\cdot\frac{db}{ad}+\frac{ab}{bc}\cdot\frac{dc}{ad}=1,$$

das heiszt:

$$(abcd)+(acdb)=1$$

entsteht. Ganz ebenso findet man:

$$(acdb) + (adcb) = 1,$$
$$(adbc) + (abdc) = 1,$$

so dasz immer je zwei der Doppelverhältnisze in (1) die *Einheit* zur Summe haben. Man hat diese *complementäre Doppelverhältnisze* genannt.

Das Vorhergehende setzt uns in den Stand, wenn eins der sechs Doppelverhältnisze in (1) gegeben ist, die übrigen fünf zu bestimmen. Setzen wir z. B. $(abcd) = \lambda$, so ist der reciproke Wert $(abdc) = \frac{1}{\lambda}$, die Complemente dieser beiden liefern $(acdb) = 1 - \lambda$, $(adbc) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ und die reciproken Werte dieser letzteren geben endlich $(acdb) = \frac{1}{1-\lambda}$ und $(adcb) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

2. **Doppelverhältnisz von vier Geraden.** Verbindet man in Fig. I. die gegebenen Puncte a, b, c, d mit einem beliebigen fünften Puncte o, der auszerhalb der Geraden ab gelegen ist, so nennt man die vier Geraden, die durch o und bezüglich durch a, b, c, d gehen, ein *Stralenbüschel*, und bezeichnet dasselbe durch $o(a, b, c, d)$. Nun hat man in den Dreiecken aoc und cob:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ao}{bo} = \frac{\sin aoc}{\sin cob},$$

und ähnlich mittelst der Dreiecke aod und dob:

$$\frac{ad}{db} : \frac{ao}{bo} = \frac{\sin aod}{\sin dob},$$

folglich:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \frac{\sin aoc}{\sin cob} : \frac{\sin aod}{\sin dob}.$$

Bezeichnen wir die vier Stralen des Büschels $o(a, b, c, d)$ bezüglich durch A, B, C, D; durch AC, CB, AD, DB die von ihnen eingeschloszenen Winkel, so geht obige Gleichung über in:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \frac{\sin AC}{\sin CB} : \frac{\sin AD}{\sin DB},$$

was wir für das Folgende kurz auf symbolische Weise durch

$$(abcd) = \sin(ABCD)$$

bezeichnen wollen.

Die rechte Seite dieser Gleichung nennt man das *Doppelverhältnisz der vier Geraden A, B, C, D* und hat also den Satz:

Lehrsatz I. *Das Doppelverhältnisz von vier Stralen A, B, C, D, welche sich in einem Puncte o schneiden, ist gleich dem Doppelverhältnisz der vier Puncte a, b, c, d, in denen diese von einer beliebigen Transversale geschnitten werden.*

Hieraus folgt noch, dasz für eine zweite Transversale, welche die vier Stralen A, B, C, D bezüglich in a', b', c', d' schneidet, das Doppelverhältnisz dieser vier Puncte gleich dem der vier Durchschnittspuncte der ersten Transversale a, b, c, d ist, und umgekehrt; zieht man durch die Puncte a, b, c, d vier andere Stralen, A', B', C', D', die sich in o' schneiden, so ist das Doppelverhältnisz der vier Stralen A', B', C', D' gleich dem der vier Stralen A, B, C, D.

3. Construction des vierten Punctes und vierten Strales.

Lehrsatz II. *Liegen die vier Puncte a, b, c, d in einer Geraden, und die drei Puncte a', b', c' in einer zweiten, so gibt es nur einen einzigen Punct d' in dieser zweiten Geraden, für den*

$$(a'b'c'd') = (abcd)$$

wird.

Dies ist augenblicklich klar, sobald man beachtet, dasz der Abschnitt $a'b'$ durch den Punct d' so geteilt werden musz, dasz

$$\frac{a'd'}{d'b'} = \left(\frac{ad}{bd} : \frac{ac}{cb}\right) \cdot \frac{a'c'}{c'b'}$$

ist.

Lehrsatz III. *Fallen daher die Puncte a und a' zusammen (Fig. II.), so schneiden sich die Stralen bb', cc', dd' in demselben Puncte o.*

Umgekehrt gilt der

Lehrsatz IV. ***Sind für zwei Stralenbüschel A, B, C, D, und A', B', C', D', deren Mittelpuncte bezüglich o und o' seien, die beiden Doppelverhältnisse***

$$\sin(ABCD) = \sin(A'B'C'D'),$$

so liegen, wenn die Stralen A und A' zusammenfallen, so dass also A und A' sowol durch o als durch o' gehen, die drei Puncte B·B', C·C', D·D' in einer geraden Linie.

Liegen a, b, c, d in einer Geraden; a', b', c', d' in einer zweiten (Fig. III.), und sind die Doppelverhältnisze $(abcd)$ und $(a'b'c'd')$ einander gleich, so haben nach Nr. 2 auch die beiden Stralenbüschel $a(a', b', c', d')$ und $a'(a, b, c, d)$ gleiche Doppelverhältnisze. In diesen beiden Strahlenbüscheln fallen die entsprechenden Stralen aa' und $a'a$ zusammen, und folglich liegen die Puncte $(ab' \cdot a'b)$, $(ac' \cdot a'c)$ und $(ad' \cdot a'd)$ in einer geraden Linie. Diese Eigenschaft gibt ein einfaches Mittel an die Hand, den Punct d' zu construieren, wenn a, b, c, d und a', b', c', d' gegeben sind.

In ähnlicher Weise löst man das entsprechende Problem für zwei Stralenbüschel von je vier Stralen.

4. Harmonische Puncte und Stralen. Ist das Doppelverhältnisz

$$(abcd) = -1,$$

so nennt man die vier Puncte a, b, c, d *harmonische Puncte*. Natürlich ist dann auch

$$(badc) = (cdab) = (dcba) = (abdc)$$
$$= (bacd) = (cdba) = (dcab) = -1.$$

Die Puncte a, b und c, d heissen *conjugierte oder zugeordnete harmonische Puncte**).

Liegt der Punct d im Unendlichen, so ist der Grenzwert des Verhältniszes $\frac{ad}{db} = -1$; dann folgt aber aus der Gleichung

*) Der Punct b ist dem Puncte a *harmonisch conjugiert* in Bezug auf c und d und umgekehrt.

$(abcd) = -1$ augenblicklich $\frac{ac}{cb} = 1$, das heiszt, c ist der Halbierungspunct des Abschnittes ab.

Die Gleichung

$$(abcd) = -1,$$

oder auch

$$\frac{ac}{cb} + \frac{ad}{db} = 0$$

zeigt, dasz, wenn einer der beiden Puncte c, d, z. B. c, zwischen a und b liegt, der zweite Punct d auszerhalb des endlichen Abschnittes ab fällt, dasz ferner, wenn a und b zusammenfallen, auch c mit denselben zusammenfällt, und dasz, wenn a und c zusammenfallen, auch d und a zusammenfallen.

Die harmonische Gleichung individualisiert also den vierten Punct, sobald die drei übrigen gegeben sind, fallen diese aber zusammen, so ist die Lage des vierten Punctes unbestimmt.

Dem entsprechend heiszen vier Stralen A, B, C, D, die sich in einem Puncte schneiden, ***harmonische Stralen***, wenn

$$\sin(ABCD) = -1$$

ist, das heiszt, wenn sie von einer beliebigen Transversale in vier harmonischen Puncten geschnitten werden.

5. Harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierseits. Es sei (Fig. IV.) ein ***vollständiges Vierseit*** gegeben, das heiszt, ein System von vier Geraden, die sich zu zwei und zwei in sechs Puncten a, b, c; a', b', c', schneiden. Die drei Diagonalen aa', bb' cc' bilden ein Dreieck abc. Bezeichnen wir durch x den zugeordneten harmonischen Punct von b in Bezug auf c und c'; den zu c zugeordneten harmonischen Punct in Bezug auf b und b' durch y, so musz sowol der zu aa' in Bezug auf acb' und $ac'b$ zugeordnete harmonische Stral, als auch der zu $a'a$ in Bezug auf $a'bc$ und $a'b'c'$ zugeordnete harmonische Stral durch x und y gehen. Diese beiden Puncte fallen daher mit a, dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Diagonalen, zusammen, und damit ist bewiesen, dasz jede Diagonale durch die beiden andern harmonisch geteilt wird.

Hieraus ergibt sich eine einfache Regel zur Construction eines der vier harmonischen Puncte a, c, b, b', wenn die drei übrigen gegeben sind.

Eine ähnliche Beziehung findet für das *vollständige Viereck* (System von vier Puncten, die zu je zwei in sechs Geraden liegen) statt, und liefert das Mittel zur Construction eines harmonischen Stralenbüschels.

6. Bedingung, dasz vier Puncte harmonische sind. Vier Puncte m_1, m_2, m_3, m_4 einer Geraden können, indem man sie alle auf einen fünften Punct o derselben Geraden bezieht, durch eine Gleichung des vierten Grades von der Form

$$(2) \qquad \alpha.\overline{om}^4 + 4\beta.\overline{om}^3 + 6\gamma.\overline{om}^2 + 4\delta.\overline{om} + \varepsilon = 0$$

repräsentiert werden. Die vier Wurzeln derselben kann man nämlich als die vier Abschnitte

$$om_1, \quad om_2, \quad om_3, \quad om_4$$

auffaszen.

Ist nun das Doppelverhältnisz $(m_1m_2m_3m_4)$ der negativen Einheit gleich, so ist:

$$m_1m_3 . m_4m_2 + m_2m_3 . m_4m_1 = 0,$$

das heiszt, wenn wir für die Abschnitte

$$m_1m_3, \quad m_4m_2, \quad m_2m_3, \quad m_4m_1$$

die Differenzen

$$om_3 - om_1, \quad om_2 - om_4, \quad om_3 - om_2, \quad om_1 - om_4$$

einführen und auf die bekannten Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln einer Gleichung Bezug nehmen:

$$\alpha(om_1 . om_2 + om_3 . om_4) - 2\gamma = 0.$$

Dem entsprechend folgen aus den Gleichungen

$$(m_1m_3m_4m_2) = -1, \quad (m_1m_4m_2m_3) = -1$$

die Relationen:

$$\alpha(om_1 . om_3 + om_4 . om_2) - 2\gamma = 0,$$
$$\alpha(om_1 . om_4 + om_2 . om_3) - 2\gamma = 0.$$

Durch Multiplication dieser drei Gleichungen erhalten wir die notwendige, aber auch hinreichende Bedingungsgleichung dafür, dasz eins der drei Systeme

$$(m_1 m_2 m_3 m_4),\quad (m_1 m_3 m_4 m_2),\quad (m_1 m_4 m_2 m_3)$$

ein harmonisches System von Puncten darstellt. Die Endgleichung ist für die Abschnitte om_1, om_2, om_3, om_4 symmetrisch, man kann sie also nur mittelst der Coefficienten der Gleichung (2) darstellen. Wir erhalten so:

$$\alpha\gamma\varepsilon + 2\beta\gamma\delta - \alpha . \delta^2 - \varepsilon . \beta^2 - \gamma^3 = 0$$

als Bedingung, dasz die durch Gleichung (2) gegebenen Puncte in beliebiger Ordnung genommen ein harmonisches System bilden*).

§. 2.
Projectivische Punctreihen und Stralenbüschel.

7. Erklärung projectivischer Gebilde. Wir bezeichnen durch den Namen einer *Punctreihe* eine Folge von Puncten, die in *derselben* Geraden gelegen sind, und durch *Stralenbüschel* eine Folge von Geraden, die, in *derselben* Ebene gelegen, durch *denselben* Punct gehen. Diesen Punct selbst nennen wir *Mittelpunct* oder *Centrum* des Stralenbüschels**). Punctreihe und Stralenbüschel faszen wir unter dem Namen *Geometrisches Gebilde* zusammen, und verstehen unter *Element* eines geometrischen Gebildes die einzelnen Puncte, oder die einzelnen Stralen, aus denen eine Punctreihe oder ein Stralenbüschel zusammengesetzt ist.

*Zwei geometrische Gebilde heiszen projectivisch, wenn zwischen ihren Elementen eine solche Relation besteht, dasz jedem Elemente des einen Gebildes ein einziges bestimmtes Element des andern Gebildes entspricht, und einem jeden Element dieses zweiten Gebildes ebenso nur ein bestimmtes Element des ersten Gebildes****).

---

*) Salmon, *Lessons introductory to the modern higher algebra*, Dublin 1859. p. 100.

**) Bellavitis, *Geometria descrittiva*, Padova 1851, p. 75.

***) Chasles, *Principe de correspondance entre deux objets variables etc.*

So bilden z. B., wenn ein Stralenbüschel durch eine beliebige Transversale geschnitten wird, die Durchschnittspuncte eine projectivische Punctreihe des Stralenbüschels.

Aus obiger Definition folgt offenbar:

Lehrsatz I. *Zwei Gebilde, die beide in Bezug auf ein drittes projectivisch sind, sind auch unter sich projectivisch.*

8. Gleichheit der Doppelverhältnisze. Betrachten wir zuerst zwei gerade *Punctreihen*. Es seien j und j' zwei feste Puncte in jeder der beiden Geraden je einer, so ist jeder Punct m der ersten Geraden durch den Abschnitt jm, jeder Punct m' der zweiten Geraden durch den Abschnitt $j'm'$ vollständig bestimmt. Sind nun die beiden Punctreihen projectivisch und m und m' *einander entsprechende* Puncte, so wird zwischen den Abschnitten jm und $j'm'$ eine Relation bestehen, die in Gemäszheit unserer Definition projectivischer Gebilde die Form

$$(1) \qquad \varkappa . jm . j'm' + \lambda . jm + \mu . j'm' + \nu = 0$$

haben musz, wobei $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ constante Coefficienten bedeuten. Diese Gleichung läszt sich vereinfachen, wenn man die Anfangspuncte j und j' angemessen bestimmt. Ist j der Punct der ersten Punctreihe, deszen entsprechender Punct der zweiten Punctreihe im Unendlichen liegt, so musz dem Abschnitte $jm = 0$ der Abschnitt $j'm' = \infty$ entsprechen, es musz also $\mu = 0$ sein. Ist ebenso j' der Punct der zweiten Punctreihe, dem der unendlich entfernte Punct der ersten Punctreihe entspricht, so musz auch λ gleich Null sein, und die Gleichung (1) geht über in:

$$(2) \qquad jm . j'm' = \varkappa,$$

wo $\varkappa$ eine Constante bezeichnet.

Es seien a, b, c, d vier Puncte der ersten Punctreihe; a', b', c', d' die vier entsprechenden Puncte der zweiten, dann folgt aus Gleichung (2):

(Comptes rendus de l'Académie de France, 24. décembre 1855). — *Battaglini*, *Sulla dipendenza scambievole delle figure* (Memorie delle R. Accademia delle science, vol. 2. Napoli 1857, p. XXI u. p. 188).

$$j'a' = \frac{\varkappa}{ja}, \quad j'c' = \frac{\varkappa}{jc},$$

und daher:

$$a'c' = -\frac{\varkappa . jc}{ja . jc}.$$

Für $c'b'$, $a'd'$, $d'b'$ findet man entsprechende Werte und hieraus:

$$\frac{a'c'}{c'b'} : \frac{a'd'}{d'b'} = \frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db},$$

das heiszt:

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

Es sei zweitens ein *Stralenbüschel* und eine ihm projectivische *Punctreihe* gegeben. Wir ziehen eine beliebige Transversale welche nach Nr. 7. das Stralenbüschel in einer projectivischen Punctreihe schneidet, die nach derselben Nummer der ersten Punctreihe ebenfalls projectivisch ist. Sind a, b, c, d vier Puncte der gegebenen Punctreihe; A, B, C, D die ihnen entsprechenden Stralen des Büschels; a', b', c', d' die Puncte, in welchen die Transversale diese vier Stralen schneidet, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

Aber nach Nr. 2. ist auch:

$$(a'b'c'd') = \sin(ABCD),$$

folglich:

$$(abcd) = \sin(ABCD).$$

Seien endlich zwei projectivische *Stralenbüschel* gegeben. Wir schneiden sie durch zwei Transversalen (oder auch nur durch eine einzige). Es entstehen dadurch zwei Punctreihen, die bezüglich zu den Stralenbüscheln projectivisch sind und also auch projectivisch unter sich. Bezeichnen A, B, C, D vier Stralen des ersten Büschels, A', B', C', D' die vier entsprechenden Stralen des zweiten; a, b, c, d und a' b' c' d' bezüglich die Durchschnittspuncte dieser Stralen mit den beiden Transversalen, so ist, weil beide Punctreihen projectivisch sind,

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

Nach Nr. 2 ist aber:

$$(a'b'c'd') = \sin(A'B'C'D'),$$
$$(abcd) = \sin(ABCD);$$

also:

$$\sin(A'B'C'D') = \sin(ABCD).$$

Alles zusammengenommen ergibt den Satz:

Lehrsatz II. *Das Doppelverhältniss aus vier beliebigen Elementen eines geometrischen Gebildes ist gleich dem Doppelverhältniss aus den vier entsprechenden Elementen eines ihm projectivischen geometrischen Gebildes.*

Um also zwei projectivische Gebilde zu entwerfen, reicht es hin, drei der Elemente und die drei entsprechenden nach Willkür zu wählen, z. B. die Punctpaare a, a'; b, b'; c, c'. Jedes weitere Element des einen Gebildes, z. B. m, bestimmt dann das entsprechende Element des anderen Gebildes m' aus der Gleichheit der beiden Doppelverhältnisze $(a'b'c'm') = (abcm)$.

9. Projectivische Punctreiben auf einer Geraden. Legen wir zwei projectivische Punctreihen auf einander, oder haben wir zwei projectivische Punctreihen auf derselben Geraden, was wir z. B. durch Durchschneidung zweier projectivischer Stralenbüschel durch eine einzige Transversale bewirken können, so ist nach Gleichung (2) in Nr. 8 die Projectivität dieser Punctreihen ausgedrückt durch:

$$jm . j'm' = \varkappa$$

Mittelst dieser Gleichung wollen wir untersuchen, ob es einen Punct m gibt, der mit seinem entsprechenden Punct m' zusammenfällt.

Denken wir uns die beiden Punctreihen durch gleichzeitige Bewegung zweier entsprechender Puncte m und m' entstanden, so werden sich diese Puncte offenbar in demselben Sinne oder in entgegengesetztem bewegen, je nachdem die Constante $\varkappa$ negativ oder positiv ist.

Es sei zuerst $\varkappa > 0$. Offenbar kann man in diesem Falle auf der Verlängerung des Abschnittes $j'j$ einen Punct e bestim-

men, so dasz $je.fe = \varkappa$ ist. Nehmen wir dann auf der Verlängerung von jj' einen Punct f so an, dass seine Entfernung von j' gleich der Entfernung des Punctes e von j ist, so ist auch $jf.j'f = \varkappa$, und es fallen daher die Puncte e und f, als Elemente der einen Punctreihe betrachtet, mit den ihnen entsprechenden Elementen der zweiten Punctreihe zusammen.

Sei zweitens $\varkappa = -\lambda^2$. In diesem Falle können die beiden Puncte m und m' nur zusammenfallen, wenn sie zwischen j und j' liegen. Es handelt sich also in diesem Falle nur darum, den Abschnitt jj' in zwei andere Abschnitte zu teilen, so dasz ihr Product gleich λ^2 sei. Ist nun $2\lambda < jj'$, so sind e und f, die Fuszpuncte der Perpendikel auf jj', welche durch den Halbkreis über jj' als Durchmeszer und jj' begränzt gleich λ sind, zwei der Aufgabe entsprechende Puncte. Ist $2\lambda = jj'$, so fällt nur der Halbierungspunct von jj' mit seinem entsprechenden Puncte zusammen. Ist endlich $2\lambda > jj'$ so hat die Aufgabe keine *reelle* Auflösung. Hieraus folgt:

> Lehrsatz III. *Werden zwei projectivische Punctreihen aufeinander gelegt, so haben sie immer zwei gemeinschaftliche (reelle, imaginäre oder zusammenfallende) Puncte, die gleichweit vom Halbierungspuncte des Abschnittes jj' abstehen.*

Da die *gemeinschaftlichen Punkte höchstens* zwei sein können, so folgt aus dem Obigen noch, dasz, wenn zwei projectivische Punctreihen aufeinandergelegt drei einander entsprechende Puncte gemein haben, dieselben *identisch* sind. Wirklich fällt nach dem Früheren, wenn

$$(abcm) = (abcm')$$

ist, der Punct m mit m' zusammen.

Sind e und f die zwei *gemeinschaftlichen Puncte* zweier projectivischer aufeinander gelegter Punctreihen; a und a', b und b' zwei beliebige einander entsprechende Punctpaare, so besteht die Gleichheit der Doppelverhältnisze:

$$(abef) = (a'b'ef),$$

und da dieses sich auch auf folgende Weise schreiben läszt

$$(aa'ef) = (bb'ef),$$

so folgt augenblicklich:

Lehrsatz IV. *Das Doppelverhältniss $(aa'ef)$ ist constant für jedes beliebige sich entsprechende Punctpaar a, a'.*

10. Concentrische Stralenbüschel. Schneiden wir zwei projectivische concentrische Stralenbüschel durch eine Transversale, so entstehen auf derselben zwei projectivische Punctreihen. Die einander entsprechenden Puncte m und m' sind die Durchschnittspuncte der Transversale mit zwei sich entsprechenden Stralen M und M' der beiden Stralenbüschel. Sind nun e und f die gemeinschaftlichen Puncte der beiden Punctreihen, so müszen, da die Puncte e und f der ersten Punctreihe mit den entsprechenden Puncten e' und f' der zweiten Punctreihe zusammenfallen, auch die Stralen E und F des ersten Stralenbüschels bezüglich mit den ihnen entsprechenden Stralen des zweiten Stralenbüschels zusammenfallen. Daher der Satz:

Lehrsatz V. *Zwei concentrische projectivische Stralenbüschel haben immer zwei (reelle, imaginäre oder zusammenfallende) gemeinschaftliche Stralen, so dass jeder von ihnen sich selbst entspricht.*

§. 3.

Theorie der harmonischen Mittelpuncte.

11. Erklärung der harmonischen Mittelpuncte. Es seien auf einer Geraden n Puncte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ und ein Pol o gegeben, man soll einen Punct m auf derselben Geraden so bestimmen, dasz die Summe der Producte aus je r der n Verhältnisze

$$\frac{ma_1}{oa_1}, \; \frac{ma_2}{oa_2}, \; \frac{ma_3}{oa_3}, \ldots, \frac{ma_n}{oa_n}$$

gleich Null sei.

Bezeichnen wir diese Summe durch das Symbol $\Sigma\left(\frac{ma}{oa}\right)_r$, so ist der Punct m mittelst der Gleichung

(1) $$\Sigma\left(\frac{ma}{oa}\right)_r = 0$$

bestimmt, die man, da identisch $ma = oa - om$ ist, auch auf folgende Weise

(2) $$\Sigma\left(\frac{1}{om} - \frac{1}{oa}\right)_r = 0,$$

oder entwickelt:

(3) $$\left.\begin{array}{l} \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right]\left(\frac{1}{om}\right)^r - \left[\begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix}\right]\left(\frac{1}{om}\right)^{r-1}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1 \\ \qquad + \left[\begin{matrix} n-2 \\ r-2 \end{matrix}\right]\left(\frac{1}{om}\right)^{r-2}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_2 \\ \qquad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

schreiben kann. Das Symbol $\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right]$ bezeichnet die Zahl der Combinationen aus n Elementen zur r-ten Classe.

Die Gleichung (3) gibt, da sie für om vom r-ten Grade ist, r verschiedene Lagen des Punctes m. Diese r Puncte

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$$

nennt man ***harmonische Mittelpuncte****) vom r-ten Grade für das gegebene Punctsystem

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

in Bezug auf o als Pol.

Ist $r = 1$, so gibt es nur einen solchen Punct, den schon *Poncelet* unter dem Namen ***Centrum der harmonischen Mittel*** betrachtete**).

*) *Jonquières*, *Mémoire sur la théorie des pôles et polaires etc.* (Journal de M. *Liouville*, aout 1857, p. 266).

**) *Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques.* (*Crelle's* Journal T. 3. Berlin. Reimer. 1828. S. 229).

Für $n=2$ wird der Punct m der zu o zugeordnete harmonische Punct in Bezug auf a_1 und a_2 (m. s. Nr. 4.).

12. **Reciprocität zwischen harmonischem Mittelpunct und Pol.** Multipliciert man Gleichung (1) in Nr. 11. mit $oa_1 . oa_2 \ldots . oa_n$, und dividiert sie darauf durch $ma_1 . ma_2 \ldots . ma_n$, so geht sie, wie man sogleich übersieht, über in:

$$\Sigma \left(\frac{oa}{ma}\right)_{n-r} = 0, \tag{4}$$

woraus sich augenblicklich folgender Lehrsatz ergibt:

Lehrsatz I. *Ist m ein harmonischer Mittelpunct vom Grade r für ein gegebenes Punctsystem bezogen auf den Pol o, so ist umgekehrt o ein harmonischer Mittelpunct vom Grade $n-r$ für dasselbe Punctsystem, aber bezogen auf den Pol m.*

13. **Harmonische Mittelpuncte verschiedner Grade.** Sind $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ die r Puncte, welche der Gleichung (3) in Nr. 11. genügen, und bezeichnet $\mathfrak{m}$ den harmonischen Mittelpunct ersten Grades des Systems dieser r Puncte für o als Pol, so haben wir die der Gleichung (2) in Nr. 11. analoge Gleichung:

$$\Sigma \left(\frac{1}{om} - \frac{1}{o\mathfrak{m}}\right)_1 = 0,$$

oder, wenn wir entwickeln:

$$\frac{r}{o\mathfrak{m}} = \Sigma \left(\frac{1}{om}\right)_1.$$

Aus Gleichung (3) in Nr. 11 folgt aber:

$$\Sigma \left(\frac{1}{om}\right)_1 = \frac{r}{n} \Sigma \left(\frac{1}{oa}\right)_1,$$

und folglich ist

$$\frac{n}{o\mathfrak{m}} = \Sigma \left(\frac{1}{oa}\right)_1,$$

so dass die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{om}-\frac{1}{oa}\right)_1=0$$

anzeigt, es sei m auch der harmonische Mittelpunct ersten Grades des gegebnen Punctsystems $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$ für o als Pol.

Sei weiter m einer der beiden harmonischen Mittelpuncte des zweiten Grades für o als Pol und das System $m_1, m_2, m_3, \ldots., m_r$, so ist die der Gleichung (2) in Nr. 11. analoge Gleichung:

$$\Sigma\left(\frac{1}{om}-\frac{1}{om}\right)_2=0.$$

Hieraus folgt:

$$\tfrac{1}{2}r(r-1)\left(\frac{1}{om}\right)^2-(r-1)\frac{1}{om}\Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_1+\Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_2=0;$$

aus Gleichung (3) Nr. 11. ist aber:

$$\begin{cases}\Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_1=\frac{r}{n}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1, \\ \Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_2=\frac{r(r-1)}{n(n-1)}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_2,\end{cases}$$

und durch Substitution dieser Werte entsteht:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{1}{om}\right)^2-(n-1)\frac{1}{om}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1+\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_2=0,$$

das heiszt

$$\Sigma\left(\frac{1}{om}-\frac{1}{oa}\right)_2=0.$$

Folglich ist m auch der harmonische Mittelpunct zweiten Grades des Punctsystems $a_1, a_2, a, \ldots., a_n$ für o als Pol.

Bezeichnet man so weitergehend durch m nach und nach einen harmonischen Mittelpunct des dritten, vierten, ..., $(r-1)$-ten Grades des Punctsystems $m_1, m_2, m_3, \ldots., m_r$ für o als Pol, so erhält man völlig analoge Resultate und hat damit den Satz:

Lehrsatz II. *Wenn* $m_1, m_2, m_3, \ldots., m_r$ *die harmoni-*

schen Mittelpuncte r ten Grades eines gegebenen Punctsystems $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ für o als Pol bedeuten, so sind die harmonischen Mittelpuncte vom Grade s $(s < r)$ des Systems $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ für den Pol o gleichzeitig die harmonischen Mittelpuncte des s-ten Grades des ursprünglichen Systems für denselben Pol o.

14. **Harmonische Mittelpuncte für verschiedene Pole.** Ist m ein harmonischer Mittelpunct des $(n-1)$-ten Grades in Bezug auf das gegebne System $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ für o als Pol, so gilt Gleichung (4) in Nr. 12., wenn man in derselben $r = n-1$ setzt. Führen wir einen beliebigen Punct j der gegebenen Geraden mittelst der bekannten Identitäten:

$$oa = oj + ja, \quad ma = ja - jm$$

ein, so haben wir:

$$\Sigma\left(\frac{oj + ja}{ja - jm}\right)_1 = 0,$$

woraus nach gehöriger Entwicklung entsteht:

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{jm}^{n-1}\{n.oj + \Sigma(ja)_1\} \\ -\overline{jm}^{n-2}\{(n-1)oj\Sigma(ja)_1 + 2\Sigma(ja)_2\} \\ +\overline{jm}^{n-3}\{(n-2)oj\Sigma(ja)_2 + 3\Sigma(ja)_3\} \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^{n-1}\{oj\Sigma(ja)_{n-1} + n\Sigma(ja)_n\} \end{array}\right\} = 0.$$

Sind $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}$ die harmonischen Mittelpuncte des $(n-1)$-ten Grades des gegebenen Systems für den Pol o, genügen sie also der Gleichung (5), so ist:

$$\Sigma(jm)_r = \frac{(n-r)oj\Sigma(ja)_r + (r+1)\Sigma(ja)_{r+1}}{n.oj + \Sigma(ja)_1}.$$

Bezeichnet nun m einen der harmonischen Mittelpuncte vom $(n-2)$-ten Grade für das System $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}$ und einen Pol o', der in der gegebenen Geraden liegt, so ist die der Gleichung (5) entsprechende Gleichung gegeben durch:

2*

$$\left.\begin{array}{l} \overline{jm}^{n-2}\{(n-1)o'j+\Sigma(jm)_1\} \\ -\overline{jm}^{n-3}\{(n-2)o'j\Sigma(jm)_1+2\Sigma(jm)_2\} \\ +\overline{jm}^{n-4}\{(n-3)o'j\Sigma(jm)_2+3\Sigma(jm)_3\} \\ -\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +(-1)^{n-2}\{o'j\Sigma(jm)_{n-2}+(n-1)\Sigma(jm)_{n-1}\} \end{array}\right\}=0.$$

Setzt man hierin für $\Sigma(jm)_r$ den Wert aus der vorhergehenden Gleichung, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} oj.o'j\left\{\begin{array}{l} n(n-1).\overline{jm}^{n-2}-(n-1)(n-2).\overline{jm}^{n-3}\Sigma(ja)_1 \\ \qquad +(n-2)(n-3).\overline{jm}^{n-4}\Sigma(ja)_2 \\ \qquad -\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \\ +(oj+o'j)\left\{\begin{array}{l} (n-1).\overline{jm}^{n-2}\Sigma(ja)_1-2(n-2).\overline{jm}^{n-3}\Sigma(ja)_2 \\ \qquad +3(n-3).\overline{jm}^{n-4}\Sigma(ja)_3 \\ \qquad -\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \\ +\{1.2\overline{jm}^{n-2}\Sigma(ja)_2-2.3\overline{jm}^{n-3}\Sigma(ja)_3+3.4.\overline{jm}^{n-4}\Sigma(ja)_4-\ldots\} \end{array}\right\}=0.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf o und o' symmetrisch ist, so folgt hieraus:

Lehrsatz III. *Sind $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}$ die harmonischen Mittelpuncte vom Grade $n-1$ des Systems $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ für o als Pol, und $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots, m'_{n-1}$ die harmonischen Mittelpuncte ebenfalls vom $(n-1)$-ten Grade für dasselbe System $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, aber in Bezug auf einen andern Pol o', so fallen die harmonischen Mittelpuncte vom Grade $n-2$ des Systems $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ für o' als Pol mit den harmonischen Mittelpuncten desselben Grades des Systems $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots, m'_{n-1}$ für o als Pol zusammen.*

Durch successive Anwendung dieses Satzes gelangt man zur Ausdehnung desselben auf harmonische Mittelpuncte eines beliebigen Grades und zu dem Satze:

Lehrsatz IV. *Sind $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ die harmonischen Mittelpuncte des r-ten Grades des gegebenen Punctsystems $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ in Bezug auf den Pol o; m'_1,*

$m'_2, m'_3, \ldots, m'_{r'}$ die harmonischen Mittelpuncte vom Grade r' für dasselbe Punctsystem, aber für den Pol o', so fallen die harmonischen Mittelpuncte vom Grade $r+r'-n$ des Systems $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ für den Pol o' mit den harmonischen Mittelpuncten desselben Grades für das System $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots, m'_{r'}$ und den Pol o zusammen.

15. Specielle Fälle. 1. Sind m und m bezüglich die harmonischen Mittelpuncte des ersten Grades der zwei Systeme

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n;$$

$$a_2, a_3, \ldots, a_n$$

in Bezug auf o als Pol, so ist

$$\frac{n}{om} = \frac{1}{oa_1} + \frac{1}{oa_2} + \cdots + \frac{1}{oa_n},$$

$$\frac{n-1}{o\mathrm{m}} = \frac{1}{oa_2} + \frac{1}{oa_3} + \cdots + \frac{1}{oa_n}.$$

Fällt m mit a_1 zusammen, so entsteht durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen:

$$om = o\mathrm{m},$$

und hierin ist der Lehrsatz enthalten:

Lehrsatz V. *Ist a_1 der harmonische Mittelpunct des ersten Grades des Systems $a_2, a_3, \ldots, a_n$, in Bezug auf den Pol o, so ist a_1 auch der harmonische Mittelpunct des ersten Grades für das System $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ und denselben Pol.*

16. Specielle Fälle. 2. Wir haben im Obigen stillschweigend vorausgesetzt, es seien die Puncte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ alle von einander verschieden. Nehmen wir jetzt an, es fielen die r Puncte

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-r+1}$$

in einen einzigen zusammen, es sei dies der Punct a_0, dann

folgt aus Gleichung (5) Nr. 14. augenblicklich, wenn wir für den willkürlichen Anfang i den Punct a_0 setzen:

$$\begin{aligned} \Sigma(ia)_n &= 0, \\ \Sigma(ia)_{n-1} &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ \Sigma(ia)_{n-r+1} &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung (5) Nr. 14. wird daher durch $\overline{a_0 m}^{r-1}$ teilbar, oder, was dasselbe ist, es fallen $r-1$ harmonische Mittelpuncte vom Grade $n-1$ mit a_0 zusammen, und zwar für jeden beliebigen Pol o. Beachten wir den Satz in Nr. 13., so folgt noch, dasz $r-2$ harmonische Mittelpuncte vom Grade $n-2$, $r-3$ harmonische Mittelpuncte vom Grade $n-3, \ldots,$ endlich ein harmonischer Mittelpunct vom Grade $n-r+1$ mit a_0 zusammenfallen.

17. Specielle Fälle. 3. Gleichung (3) Nr. 11. mit dem Producte aus $\overline{om}^r$ und $(-1)^r . oa_1 . oa_2 \ldots oa_n$ multipliciert liefert:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{om}^r \Sigma(oa)_{n-r} - (n-r+1)_1 \overline{om}^{r-1} \Sigma(oa)_{n-r+1} & \\ + (n-r+1)_2 \overline{om}^{r-2} \Sigma(oa)_{n-r+2} & \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ + (-1)^r (n-r+1)_r \Sigma(oa)_n & \end{aligned} \right\} = 0.$$

Hierin bezeichnen die Symbole

$$(n-r+1)_1,\ (n-r+1)_2,\ \ldots,\ (n-r+1)_r$$

wie gewöhnlich die Binomialcoefficienten.

Nehmen wir nun an, der Pol o fiele mit

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_{n-s+1}$$

in einen einzigen Punct zusammen, so folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma(oa)_n &= 0, \\ \Sigma(oa)_{n-1} &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ \Sigma(oa)_{n-s+1} &= 0; \end{aligned}$$

die Gleichung (6) wird durch $\overline{om}^s$ teilbar, und der Pol o ist der Ort für s harmonische Mittelpuncte eines beliebigen Grades. Die übrigen $r-s$ harmonischen Mittelpuncte vom Grade r ergeben sich aus der Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} \overline{om}^{r-s}\Sigma(oa)_{n-r} \\ -(n-r+1)_1 \,.\, \overline{om}^{r-s-1}\Sigma(oa)_{n-r+1} \\ +(n-r-1)_2 \,.\, \overline{om}^{r-s-2}\Sigma(oa)_{n-r+2} \\ - \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} = 0,$$

worin $\Sigma(oa)$ nur die Puncte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-s}$ enthält. Die $r-s$ übrigen Puncte m, welche mit dem s-mal genommenen Pol o die harmonischen Mittelpuncte des r-ten Grades für das Punctsystem $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ und den Pol o bilden, sind daher die harmonischen Mittelpuncte des $(r-s)$-ten Grades für das Punctsystem $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-s}$ und denselben Pol o.

Offenbar ist die letzte Gleichung für $s=r+1$ identisch erfüllt, was auch m für ein Punct sein mag; fallen also $r+1$ Puncte a und der Pol o in einen Punct zusammen, so werden die harmonischen Mittelpuncte vom Grade r unbestimmt, und man kann daher für sie beliebige Puncte der Geraden $a_1a_2a_3 \dots a_n$ nehmen.

18. **Unveränderlichkeit der Eigenschaften der harmonischen Mittelpuncte bei der Centralprojection.** Liegt das System von n Puncten $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ und ein Pol o in einer Geraden R (Fig. V.), und ist auszerdem m ein harmonischer Mittelpunct vom r-ten Grade, so besteht zwischen den Abschnitten ma und oa die Relation (1) in Nr. 11. Ist nun c ein beliebiger Punct auszerhalb der Geraden R und die Geraden co, ca, cm gezogen; schneiden wir ferner diese Stralen durch eine zweite beliebige Transversale R' und zwar bezüglich in o', a', m', so ist:

$$\frac{ma}{ca} : \frac{m'a'}{ca'} = \frac{\sin cm'a'}{\sin cma},$$

und dem entsprechend:

$$\frac{oa}{ca} : \frac{o'a'}{ca'} = \frac{\sin co'a'}{\sin coa}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{ma}{oa} : \frac{m'a'}{o'a'} = \frac{\sin cm'a'}{\sin co'a'} : \frac{\sin cma}{\sin coa}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bleibt unverändert, wenn man für a und a' zwei andere sich entsprechende Puncte substituiert, und somit ist auch

$$\frac{ma_1}{oa_1} : \frac{ma_2}{oa_2} : \ldots : \frac{ma_n}{oa_n}$$

$$= \frac{m'a'_1}{o'a'_1} : \frac{m'a'_2}{o'a'_2} : \ldots : \frac{m'a'_n}{o'a'_n}.$$

Gleichung (1) Nr. 11. ist nun aber für die Gröszen $\frac{ma}{oa}$ homogen, folglich ist auch

$$\Sigma\left(\frac{m'a'}{o'a'}\right)_r = 0,$$

und hierin ist der Satz ausgesprochen:

Lehrsatz VI. *Ist m ein harmonischer Mittelpunct des r-ten Grades für ein gegebenes System von Puncten a_1, a_2, a_3, ..., a_n auf einer Geraden und in Bezug auf einen Punct o derselben Geraden als Pol, und man projiciert alle diese Puncte mittelst eines beliebigen durch alle gelegten Stralenbüschels auf eine beliebige Transversale, so ist der Punct m', die Projection von m, ein harmonischer Mittelpunct des r-ten Grades für das System von Puncten a'_1, a'_2, a'_3, ..., a'_n, den Projectionen der Puncte a_1, a_2, a_3, ..., a_n, und für den Pol o', der Projection von o.*

Dieser Satz setzt uns in den Stand, die oben für Punctreihen auf einer Geraden gegebenen Erklärungen und Lehrsätze auf ein durch denselben Punct gelegtes Stralenbüschel zu übertragen.

19. Harmonische Axen. Es sei ein System von n Stralen A_1, A_2, A_3, ..., A_n und ein anderer Stral O gegeben, die

alle in einer Ebene liegen und durch den festen Punct c gehen. Eine beliebige Transversale R, die nicht durch c geht, schneide das gegebene System in den Puncten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; den Stral O in o. Sind nun $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ die r harmonischen Mittelpuncte des r-ten Grades für das Punctsystem $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ und den Pol o, so heiszen die Stralen $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$, die man durch c und bezüglich durch die Puncte $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ legen kann, *harmonische Axen* des r-ten Grades für das gegebene Stralensystem $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ und den Stral O.

Betrachten wir ausschlieszlich solche Stralen, die durch c gehen, so gelten folgende, den oben für Punctsysteme auf einer Geraden bewiesenen Theoremen entsprechende Sätze:

Lehrsatz VII. *Ist M eine harmonische Axe des r-ten Grades für das gegebene Stralensystem $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ in Bezug auf den Stral O, so ist O eine harmonische Axe des $(n-r)$-ten Grades für dasselbe Stralensystem in Bezug auf den Stral M.*

Lehrsatz VIII. *Sind $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$ die harmonischen Axen des r-ten Grades für ein gegebenes Stralensystem $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ in Bezug auf den Stral O, so sind die harmonischen Axen des s-ten Grades $(s < r)$ des Stralensystems $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$ in Bezug auf den Stral O auch die harmonischen Axen desselben Grades für das erste Stralensystem in Bezug auf den nämlichen Stral O.*

Lehrsatz IX. *Sind $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$ die harmonischen Axen r-ten Grades für das System von Stralen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ in Bezug auf den Stral O; $M'_1, M'_2, M'_3, \ldots, M'_r$ ebenfalls die harmonischen Axen des r-ten Grades für dasselbe Stralensystem, aber bezogen auf den Stral O', so fallen die harmonischen Axen vom Grade $r+r'-n$ des Systems der Stralen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$ bezogen auf den Stral O' mit den harmonischen Axen des nämlichen Grades für das Stralensystem $M'_1, M'_2, M'_3, \ldots, M'_r$, aber bezogen auf den Stral O, zusammen.*

Lehrsatz X. *Fallen r Stralen des Systems $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ in einen Stral zusammen, so ist für jeden beliebigen weiteren Stral O der obige r-fache Stral der Ort für*

$r-1$ harmonische Axen des $(n-1)$-ten Grades, für $r-2$ harmonische Axen des $(n-2)$-ten Grades, ..., für eine harmonische Axe des $(n-r+1)$-ten Grades.

Lehrsatz XI. *Fallen s Stralen $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}, \ldots, A_{n-s+1}$ unter sich und mit dem Stral O in einen Stral zusammen, so ist dieser der Ort für s harmonische Axen eines beliebigen Grades und die andern $r-s$ harmonischen Axen des r-ten Grades sind die harmonischen Axen des $(r-s)$-ten Grades für das System $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-s}$ bezogen auf den Stral O.*

20. Andere Auffaszung der harmonischen Axen. Wenn die Transversale R' der Nr. 18. durch den Punkt o geht, oder die Gerade R sich um den Punct o drehend gedacht wird, so läszt sich der dort bewiesene Satz auch folgendermaszen aussprechen:

Lehrsatz XII. *Gegeben sind n Stralen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, die durch den festen Punct c gehen. Führt man durch einen zweiten festen Punct o einen Stral R, der die n Stralen in den Puncten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ schneidet, so bestimmen die harmonischen Mittelpuncte r-ten Grades des Systems $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ für den Pol o, wenn R sich um den Pol o dreht, r Stralen, die sämmtlich durch c gehen.*

Aus dem letzten Satze in Nr. 19. folgt ebenso:

Lehrsatz XIII. *Fallen s Stralen des gegebenen Systems $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_{n-s+1}$ in einen einzigen Stral A_0 zusammen, so ist dieser Stral der Ort für $s-(n-r)$ der Stralen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$. Geht aber A_0 noch durch den Pol o, so ist er der Ort für s der Stralen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$ und die noch übrigen $r-s$ dieser Geraden sind die geometrischen Orte der harmonischen Mittelpuncte des $(r-s)$-ten Grades für o als Pol der Puncte, in denen die sich drehende Grade R die Stralen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-s}$ schneidet.*

§. 4.

Theorie der Involution.

21. **Involution von Punctgruppen.** In einer Geraden ist ein fester Punct o und ein beweglicher Punct a gegeben; sind nun

$$\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n;$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

constante Gröszen, ω aber eine Variable, und es besteht eine Gleichung von der Form:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c} \varkappa_n . \overline{oa}^n + \varkappa_{n-1} . \overline{oa}^{n-1} + \ldots + \varkappa_0 \\ + \omega \{ \lambda_n . \overline{oa}^n + \lambda_{n-1} . \overline{oa}^{n-1} + \ldots + \lambda_0 \} \end{array} \right\} = 0,$$

so entsprechen jedem Werte von ω n Werte von oa, das heiszt, für jeden Wert von ω erhalten wir eine Gruppe von n Puncten a. Ist umgekehrt einer der Puncte a gegeben, so folgt aus Gleichung (1), wenn man in dieselbe den gegebenen Wert von oa substituiert, der Wert von ω, und also mittelst derselben Gleichung die übrigen $n-1$ Werte von oa. Für jeden Wert von ω stellt also die Gleichung (1) eine Gruppe von n Puncten vor, die so von einander abhängen, dasz durch Bestimmung eines von ihnen alle bestimmt sind. Das System der unendlich vielen Gruppen von n Puncten, entsprechend den unendlich vielen Werten von ω, nennt man eine *Involution des n-ten Grades* *).

Eine einfache *Punctreihe* kann man nach Nr. 7. als eine Involution des ersten Grades betrachten.

Eine Involution ist durch zwei ihrer Gruppen bestimmt. Denn stellen die beiden Gleichungen

$$\varkappa_n . \overline{oa}^n + \varkappa_{n-1} . \overline{oa}^{n-1} + \ldots + \varkappa_0 = 0,$$

$$\lambda_n . \overline{oa}^n + \lambda_{n-1} . \overline{oa}^{n-1} + \ldots + \lambda_0 = 0$$

*) *Jonquières*, *Généralisation de la théorie de l'involution* (Annali di Matematica, tomo 2°. Roma 1859, pag. 86).

die beiden gegebenen Gruppen dar, so ist jede andere Gruppe der Involution durch die Gleichung

$$\varkappa_n . \overline{oa}^n + \varkappa_{n-1} . \overline{oa}^{n-1} + \ldots + \varkappa_0 + \omega(\lambda_n . \overline{oa}^n + \lambda_{n-1} . \overline{oa}^{n-1} + \ldots + \lambda_0) = 0$$

gegeben, in der ω einen beliebigen Wert hat.

22. **Zweifache Puncte einer Involution.** Fallen zwei beliebige Puncte a einer und derselben Gruppe in einen Punct zusammen, so heiszt derselbe ein *zweifacher Punct* der Involution. Wieviel zweifache Puncte enthält nun die Involution, die durch Gleichung (I) dargestellt wird?

Die Bedingungsgleichung, dasz diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, entsteht durch Gleichsetzung der *Discriminante* derselben mit Null. Diese Discriminante ist eine Function des $2(n-1)$-ten Grades der Coefficienten der gegebenen Gleichung. Setzen wir sie gleich Null, so ist sie in Bezug auf ω eine Gleichung vom Grade $2(n-1)$, und es gibt also $2(n-1)$ Gruppen, deren jede einen zweifachen Punct enthält. Hierin liegt der Satz:

Lehrsatz I. *Eine Involution vom n-ten Grade hat $2(n-1)$ zweifache Puncte.*

23. **Doppelverhältnisz von vier Gruppen.** Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$ die n Puncte einer bestimmten Gruppe. Der harmonische Mittelpunct m des ersten Grades für diese Puncte bezogen auf einen Pol o, der beliebig auf der gegebenen Geraden angenommen ist, bestimmt sich durch die Gleichung

$$\frac{n}{om} = \Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1,$$

aus welcher, unter Beachtung der Gleichung (I) in Nr. 21., sich

$$om = -n\frac{\varkappa_0 + \omega\lambda_0}{\varkappa_1 + \omega\lambda_1}$$

ergibt. Der Abschnitt, welcher durch zwei harmonische Mittelpuncte ersten Grades m und m' zweier verschiedener Gruppen begränzt wird, läszt sich also ausdrücken durch:

$$mm' = om' - om = \frac{n(\lambda_0 \varkappa_1 - \varkappa_0 \lambda_1)(\omega - \omega')}{(\varkappa_1 + \omega \lambda_1)(\varkappa_1 + \omega' \lambda_1)}.$$

Sind nun m_1, m_2, m_3, m_4 die harmonischen Mittelpuncte ersten Grades von vier Gruppen, welche den Werten ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 entsprechen, in Bezug auf den Pol o, so gilt die Gleichung:

$$(m_1 m_2 m_3 m_4) = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_3 - \omega_2} : \frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_4 - \omega_2},$$

und da dieses Resultat dasselbe bleibt, wenn wir für o einen anderen Punct annehmen, so folgt daraus:

Lehrsatz II. *Das Doppelverhältnisz der vier harmonischen Mittelpuncte ersten Grades von vier Gruppen einer Involution ist unabhängig vom Pole o.*

Hieraus folgt weiter:

Lehrsatz III. *Die Reihe der harmonischen Mittelpuncte des ersten Grades aller Gruppen einer Involution in Bezug auf einen Pol o und eine zweite Reihe harmonischer Mittelpuncte des ersten Grades der nämlichen Gruppen, aber bezogen auf einen andern Pol o', sind zwei projectivische Punctreihen.*

Unter *Doppelverhältnisz von vier Gruppen einer Involution* verstehen wir im Nachfolgenden das Doppelverhältnisz ihrer harmonischen Mittelpuncte ersten Grades nach einem beliebigen Pol.

Es sei m ein harmonischer Mittelpunct des r-ten Grades einer bestimmten Gruppe der Involution (1) in Nr. 21. in Bezug auf den Pol o, dann geht die Gleichung (6) in Nr. 17., unter Beachtung der soeben erwähnten Gleichung (1) in Nr. 21., über in:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{om}^r(\varkappa_r + \omega . \lambda_r) \\ + (n-r+1)_1 . \overline{om}^{r-1}(\varkappa_{r-1} + \omega . \lambda_{r-1}) \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + (n-r+1)_r . (\varkappa_0 + \omega . \lambda_0) \end{array}\right\} = 0,$$

und es bilden also die harmonischen Mittelpuncte des r-ten

Grades der verschiedenen Gruppen einer Involution des n-ten Grades eine neue Involution des r-ten Grades. Jedem Werte von ω entspricht eine Gruppe der Involution des n-ten Grades und eine Gruppe der Involution des r-ten Grades, also entsprechen sich je zwei Gruppen dieser beiden Involutionen. Da nun das Doppelverhältnisz von vier Gruppen einer Involution nur von den vier entsprechenden Werten von ω abhängt, so sind auch die Doppelverhältnisze von je vier einander entsprechenden Gruppen beider Involutionen einander gleich. Dies läszt sich auch daraus folgern, dasz nach Nr. 13. je zwei entsprechenden Gruppen der beiden Involutionen für den nämlichen Pol o derselbe harmonische Mittelpunct ersten Grades zukommt.

24. Projectivische Involutionen. Zwei Involutionen heiszen ***projectivisch***, mögen sie auf einer Geraden oder auf zwei verschiedenen liegen, sobald die harmonischen Mittelpuncte des ersten Grades der Gruppen der einen Involution für einen beliebigen Pol und die harmonischen Mittelpuncte desselben Grades der Gruppen der andern Involution für einen andern Pol zwei projectivische Punctreihen bilden. Gemäsz dieser Definition und der für das Doppelverhältnisz von vier Gruppen einer Involution, entsteht:

Lehrsatz IV. *In zwei projectivischen Involutionen ist das Doppelverhältnisz von vier Gruppen der einen Involution gleich dem Doppelverhältnisz der vier entsprechenden Gruppen der andern.*

Das am Ende von Nr. 8. ausgesprochene Theorem begreift also auch die Involutionen unter sich, und man kann diese somit auch als geometrische Gebilde betrachten, deren Elemente Gruppen von Puncten sind.

a. Beziehungen zwischen den variablen Coefficienten. Fragen wir zuerst, wie die Projectivität zweier Involutionen sich ausdrücken läszt.

Es sei die erste derselben durch die Gleichung (1) in Nr. 21, die zweite durch die folgende Gleichung gegeben:

$$(3)\quad \left.\begin{array}{c} \varkappa'_m.\overline{oa}^m + \varkappa'_{m-1}.\overline{oa}^{m-1} + \ldots. + \varkappa'_0 \\ + \theta\,\{\lambda'_m.\overline{oa}^m + \lambda'_{m-1}.\overline{oa}^{m-1} + \ldots. + \lambda'_0\} \end{array}\right\} = 0,$$

in der α einen beliebigen Punct der Geraden, auf der die zweite Involution liegt, o den Anfang der Abschnitte in dieser Geraden

$$x'_m,\ x'_{m-1},\ x'_{m-2},\ \ldots,\ x'_0;$$

$$\lambda'_m,\ \lambda'_{m-1},\ \lambda'_{m-2},\ \ldots,\ \lambda'_0$$

constante Coefficienten bezeichnen.

Wir setzen voraus, was offenbar gestattet ist, es entsprächen den Gruppen

$$\omega=0,\ \omega=\infty,\ \omega=1$$

der ersten Involution die Gruppen

$$\theta=0,\ \theta=\infty,\ \theta=1$$

der zweiten. Sollen die beiden Gleichungen (1) in Nr. 21. und (3) zwei entsprechende Gruppen vorstellen, so ist es notwendig aber auch hinreichend, wenn das Doppelverhältnisz der vier Gruppen der ersten Involution, $(0, \infty, 1, \omega)$, gleich dem Doppelverhältnisz der entsprechenden vier Gruppen der zweiten Involution, $(0, \infty, 1, \theta)$, ist. Aus der Gleichung

$$(0, \infty, 1, \omega) = (0, \infty, 1, \theta)$$

folgt aber augenblicklich:

$$\omega=\theta,$$

und man kann also mit Rücksicht auf ihre Projectivität mit der ersten Involution die zweite durch die Gleichung

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{c} x'_m.\overline{o\alpha}^m + x'_{m-1}.\overline{o\alpha}^{m-1} + \ldots + x'_0 \\ + \omega\{\lambda'_m.\overline{o\alpha}^m + \lambda'^{m-1}.\overline{o\alpha}^{m-1} + \ldots + \lambda'_0\} \end{array}\right\} = 0$$

darstellen. Die Gleichung (1) in Nr. 21. und die letzte Gleichung geben nun für ein und denselben Wert von ω zwei entsprechende Gruppen der zwei projectivischen Involutionen. Eliminiert man zwischen den obigen Gleichungen ω, so erhält man eine Relation, in welcher der Zusammenhang oder die Zugehörigkeit der Puncte a und α ausgedrückt ist.

b. Gemeinschaftliche Puncte. Liegen die beiden Involutionen auf derselben Geraden, so kann man die Puncte

a und α auf denselben Anfang beziehen, man kann also für o den Punct o setzen. In diesem Falle liegt die Frage nahe, wie oftmal zwei sich entsprechende Puncte a und α zusammenfallen. Eliminieren wir aus (1) in Nr. 21. und aus (4) in Nr. 24 *a*. ω und setzen oa für $o\alpha$, so entsteht:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} (\varkappa_n.\overline{oa}^n + \ldots. + \varkappa_0)(\lambda'_m.\overline{oa}^m + \ldots. + \lambda'_0) \\ -(\lambda_n.\overline{oa}^n + \ldots. + \lambda_0)(\varkappa'_m.\overline{oa}^m + \ldots. + \varkappa'_0) \end{array}\right\} = 0,$$

eine Gleichung die in Bezug auf oa vom $(m+n)$-ten Grade ist. Das führt auf den Satz:

Lehrsatz V. ***Auf einer Geraden, auf welcher zwei projectivische Involutionen bezüglich vom n-ten und m-ten Grade liegen, gibt es im Allgemeinen n + m Puncte, deren jeder, als der einen Involution angehörig betrachtet mit seinem entsprechenden Puncte der andern Involution zusammenfällt.***

Diese Puncte nennen wir ***gemeinschaftliche Puncte*** der beiden Involutionen.

c. Involutionen mit vielfachem Punct. Ist die linke Seite der Gleichung (1) in Nr. 21. durch $\overline{oa}^r$ teilbar, so stellt sie eine Involution des n-ten Grades dar, deren Gruppen r gemeinschaftliche Puncte haben, die alle mit o zusammenfallen. In Wahrheit stellt sie aber eine Involution des $(n-r)$-ten Grades vor, zu deren einzelnen Gruppen jedesmal r-mal der Punct o hinzugefügt ist. In diesem Falle musz natürlich auch Gleichung (5) in Nr. 24 *b*. durch $\overline{oa}^r$ teilbar sein, und die $n+m$ gemeinschaftlichen Puncte der beiden gegebenen Involutionen bestehen aus dem r-mal genommenen Puncte o und aus den $m+n-r$ gemeinschaftlichen Puncten der zweiten Involution vom m-ten Grade und der vom $(n-r)$-ten Grade, welche entsteht, wenn man den Gruppen der ersten Involution den Punct o entzieht.

Enthalten die Gruppen der zweiten Involution s-mal den Punct o, so erscheint derselbe $(r+s)$-mal unter den gemeinschaftlichen Puncten beider Involutionen.

d. Fortsetzung des Vorigen. Wenn eine Gruppe der ersten Involution, etwa die, welche wir erhalten, wenn ω gleich Null gesetzt wird, r-mal denselben Punct o enthält, und die entsprechende Gruppe der zweiten Involution enthält s-mal denselben Punct o, wo $s > r$ vorausgesetzt ist, so enthält die linke Seite der Gleichung (5) offenbar $\overline{oa}^r$ als Factor, und der Punct o vertritt daher r mal die Stelle zweier ***gemeinschaftlicher Puncte*** der beiden Involutionen.

e. Involution von Stralengruppen. Es ist wol überflüssig, zu bemerken, dasz für Stralen, die alle durch denselben Punct gehen, sich eine, mit der soeben für die Puncte einer Geraden auseinander gesetzten Theorie, vollständig analoge Theorie der Involution aufstellen läszt.

25. Die quadratische Involution. Besondere Beachtung verdient die Involution des zweiten Grades oder die ***quadratische Involution.*** Für diese geht die Gleichung (1) in Nr. 21., wenn $n = 2$ gesetzt wird, über in:

$$(6) \qquad \left.\begin{array}{l} \varkappa_2 . \overline{oa}^2 + \varkappa_1 . oa + \varkappa_0 \\ + \omega \{ \lambda_2 . \overline{oa}^2 + \lambda_1 . oa + \lambda_0 \} \end{array}\right\} = 0.$$

Jede Gruppe ist also nur aus zwei Puncten zusammengesetzt, die ***conjugierte Puncte*** genannt werden mögen; ***Mittelpunct*** heisze der Punct, deszen conjugierter Punct in unendlicher Entfernung liegt. Wir laszen den Anfang der Abschnitte mit dem Mittelpuncte zusammenfallen und nehmen auszerdem an, der Gruppe, zu welcher er gehört, entspreche der Wert $\omega = \infty$. Dann ist $\lambda_2 = \lambda_0 = 0$, und wenn a und a' zwei conjugierte Puncte sind, so geht Gleichung (6) über in:

$$oa . oa' = \frac{\varkappa_0}{\varkappa_2} = \text{const.}$$

Vergleichen wir diese Relation mit der, welch ein Nr. 9. ausdrückte, zwei Punctreihen seien projectivisch, das heiszt mit

$$ja . j'a = \text{const.},$$

so ist klar, dasz die quadratische Involution entsteht, wenn zwei projectivische Punctreihen so aufeinander gelegt werden, dasz

die Puncte j und f', welche den Puncten im Unendlichen entsprechen, zusammenfallen. Anders ausgedrückt, bilden zwei aufeinandergelegte projectivische Punctreihen eine quadratische Involution, wenn einem Puncte a, sowol der einen, als der andern Punctreihe angehörig betrachtet, als entsprechender Punct der einzige a' zugehört. Daraus folgt der Satz:

Lehrsatz VI. *In einer quadratischen Involution ist das Doppelverhältnisz von vier Puncten dem Doppelverhältnisz der vier ihen conjugierten Puncte gleich.*

a. Eigenschaften der zweifachen Puncte der quadratischen Involution. Es seien e und f die beiden zweifachen Puncte der Involution (m. s. Nr. 22.). Sie sind bestimmt durch die Gleichung:

$$\overline{oe}^2 = \overline{of}^2 = \text{const.},$$

und es ist also

$$(efaa') = (efa'a).$$

Das Doppelverhältnisz $(efaa')$ ist daher seinem reciproken Verhältnisz gleich und folglich gleich -1, da das Doppelverhältnisz von vier *verschiedenen* Puncten nicht der positiven Einheit gleich sein kann. Wir haben somit den Satz:

Lehrsatz VII. *In einer quadratischen Involution sind die zweifachen Puncte und zwei beliebige conjugierte Puncte vier harmonische Puncte.*

Die Involution des zweiten Grades läszt sich also als die unendliche Reihe von Punctpaaren a, a' auffaszen, welche den gegebenen Abschnitt ef harmonisch teilen.

b. Quadratische Involutionen auf derselben Geraden. Zwei Involutionen zweiten Grades, die auf derselben Geraden liegen, haben eine Gruppe gemein. Es gibt also zwei Puncte a und a' so beschaffen, dasz der Abschnitt aa' sowol von den zweifachen Puncten e und f der ersten Involution, als den zweifachen Puncten g und h der zweiten Involution harmonisch geteilt wird.

Nehmen wir nämlich einen beliebigen Punct m der gegebenen Geraden und bezeichnen durch m' und m_1 die beiden

conjugierten Puncte von *m* für die beiden Involutionen, so erzeugen, wenn *m* sich auf der Geraden bewegt, *m'* und m_1 zwei projectivische Punctreihen, deren *gemeinschaftliche Puncte* offenbar die den beiden gegebenen Involutionen gemeinschaftliche Gruppe bilden.

Es ist augenblicklich klar, dasz zwei Involutionen von gleichem Grade, der aber gröszer als 2 ist, auf dieselbe Gerade gelegt, im Allgemeinen keine gemeinschaftliche Gruppe besitzen.

26. Aequianharmonisches System von vier Puncten. Mittelst der Theorie der quadratischen Involution löst sich die folgende Aufgabe.

Es seien *a, b, c, d* vier Puncte in gerader Linie. Die drei anharmonischen Grundverhältnisze derselben sind nach Nr. 1.:

$$(abcd) = \lambda, \quad (acdb) = \frac{1}{1-\lambda}, \quad (adbc) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Sind nun zwei dieser Verhältnisze einander gleich, das heiszt ist:

$$(7) \qquad \lambda = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

so ist auch

$$\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

und es sind also alle drei Doppelverhältnisze einander gleich.

Es sind nun die drei Puncte *a, b, c* in gerader Linie gegeben, man soll einen Punct *d* so bestimmen, dasz der Gleichung:

$$(abcd) = (acdb),$$

oder auch:

$$(abcd) = (cabd)$$

genügt wird.

Wir nehmen willkürlich auf der gegebenen Geraden den Punct *m* an, und bestimmen einen Punct *m'* so, dasz

$$(abcm) = (cabm')$$

ist. Verändern nun m und m' ihre Lage, so entstehen zwei projectivische Punctreihen, in denen den Puncten a, b, c, m in derselben Ordnung die Puncte c, a, b, m' entsprechen. Sind d und e die beiden *gemeinschaftlichen Puncte* dieser Punctreihen, so ist

$$(abcd) = (cabd), \quad (abce) = (cabe),$$

und unsere Aufgabe ist also durch jeden der beiden Puncte d und e gelöst.

Sind nun $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ diejenigen drei Puncte der gegebenen Geraden, welche die drei anharmonischen Verhältnisze

$$(bca\mathfrak{a}), \ (cab\mathfrak{b}), \ (abc\mathfrak{c})$$

zu harmonischen machen, so sind die beiden Punctsysteme

$$a, \ b, \ c, \ \mathfrak{c}$$

und

$$a, \ c, \ b, \ \mathfrak{b}$$

projectivisch, und da dem Puncte b in jedem der beiden Systeme der Punct c entspricht, so sind die drei Punctpaare

$$a, \ a; \ b, \ c; \ \mathfrak{b}, \ \mathfrak{c}$$

in Involution, und a ist der eine zweifache Punct dieser durch die Punctpaare b, c; $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bestimmten quadratischen Involution. Der zweite zweifache Punct dieser Involution ist $\mathfrak{a}$, da nach dem Obigen der Abschnitt bc durch a und $\mathfrak{a}$ harmonisch geteilt wird. Folglich teilt a und $\mathfrak{a}$ auch den Abschnitt $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ harmonisch, und es ist:

$$(bca\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}a) = -1.$$

Die Punctsysteme

$$b, \ c, \ a, \ \mathfrak{a}; \ \ \mathfrak{b}, \ \mathfrak{c}, \ \mathfrak{a}, \ a$$

sind also projectivisch, das heiszt, es sind auch die drei Punctpaare

$$a, \ \mathfrak{a}; \ \ b, \ \mathfrak{b}; \ \ c, \ \mathfrak{c}$$

in Involution*).

---

*) *v. Staudt, Geometrie der Lage*, Nürnberg, Bauer und Raspe. 1847. S. 121.

Durch den beliebigen Punct o auszerhalb der gegebenen Geraden ziehe man die Stralenbüschel

$$o(a, \mathfrak{a}, b, \mathfrak{b}, c, \mathfrak{c}) \quad \text{und} \quad o(d, e)$$

und schneide sie dann beide mittelst einer zu oc parallelen Transversale. Die Durchschnittspuncte seien bezüglich:

$$a', \mathfrak{a}', b', \mathfrak{b}', \infty, \mathfrak{c}'; d', e'.$$

Dann ist

$$\lambda = (acdb) = (a'\infty d'b') = \frac{a'd'}{a'b'},$$

und Gleichung (7) geht also über in:

$$(8) \qquad \overline{a'd'}^2 - a'd'.a'b' + \overline{a'b'}^2 = 0.$$

Ist $(abcd) = -1$, so ist auch $(a'b'\infty\mathfrak{c}') = -1$, folglich halbiert $\mathfrak{c}'$ den Abschnitt $a'b'$. Hieraus folgen die Identitäten:

$$a'd' = \mathfrak{c}'d' - \mathfrak{c}'a',$$

$$a'b' = -2\mathfrak{c}'a',$$

durch deren Substitution Gleichung (8) sich auf

$$(9) \qquad \overline{\mathfrak{c}'d'}^2 = \overline{\mathfrak{c}'e'}^2 = 3\mathfrak{c}'a'.\mathfrak{c}'b'$$

reduciert. Es halbiert also $\mathfrak{c}'$ auch den Abschnitt $d'e'$, und folglich ist

$$(d'e'\infty\mathfrak{c}') = -1,$$

das heiszt

$$(dec\mathfrak{c}) = -1.$$

Ebenso beweist man, dasz

$$(deb\mathfrak{b}) = -1 \quad \text{und} \quad (dea\mathfrak{a}) = -1.$$

Es sind also d und e die beiden zweifachen Puncte der Involution

$$a, \mathfrak{a}; b, \mathfrak{b}; c, \mathfrak{c}\ ^{*}).$$

---

*) v. Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg, Bauer und Raspe. 1856—57—60, S. 178.

Das Doppelverhältnisz λ ist durch Gleichung (7) gegeben, es ist also gleich einer der imaginären dritten Wurzeln aus -1; folglich können die vier Puncte a, b, c, d oder a, b, c, e nicht alle reell sein. In Gleichung (9) ist aber die rechte Seite negativ oder positiv, je nachdem die Puncte a' und b' reell oder imaginär conjugierte sind. Sind daher die drei Puncte a, b, c alle drei reell, so sind die Puncte d und e conjugierte imaginäre Puncte, sind dagegen zwei der obigen Puncte imaginär conjugiert, so sind die Puncte d und e reell.

Aus Gleichung (8) folgt noch, dasz, wenn $a'b' = 0$ ist, auch $a'd' = a'e' = 0$ ist, dasz also, wenn zwei der gegebenen Puncte zusammenfallen, auch die beiden Puncte d und e mit ihnen zusammenfallen.

Ein System von vier Puncten heisze *äquianharmonisch*, wenn die drei anharmonischen Grundverhältnisze einander gleich sind, wenn der Wert dieser Doppelverhältnisze also gleich einer der beiden imaginären dritten Wurzeln aus -1 ist.

27. Bedingungsgleichung für ein äquianharmonisches System. Sind vier Puncte m_1, m_2, m_3, m_4 in gerader Linie nach Nr. 6. durch die Gleichung

$$(10) \qquad \alpha.\overline{om}^4 + 4\beta.\overline{om}^3 + 6\gamma.\overline{om}^2 + 4\delta.om + \varepsilon = 0$$

gegeben, und sollen dieselben ein äquianharmonisches System bilden, so musz

$$(m_1 m_2 m_3 m_4) = (m_1 m_3 m_4 m_2)$$

sein, das heiszt, wenn wir für die Segmente $m_1 m_2, \ldots.$ die entsprechenden Differenzen $om_2 - om_1, \ldots.$ setzen:

$$\left.\begin{array}{r}(om_1 - om_2)(om_1 - om_3)(om_4 - om_2)(om_4 - om_3)\\ + (om_2 - om_3)^2(om_1 - om_4)^2\end{array}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird bei der Entwicklung für die vier Abschnitte om_1, om_2, om_3, om_4 symmetrisch, und läszt sich also nur durch die Coefficienten der Gleichung (10) ausdrücken. Mittelst der bekannten Beziehungen zwischen den Coefficienten und den

Wurzeln einer Gleichung findet man ohne grosze Schwierigkeit die Gleichung

$$\alpha.\varepsilon - 4\beta.\delta + 3\gamma^2 = 0$$

als Bedingung, die notwendig, aber auch hinreichend ist, damit die vier durch die Gleichung (10) gegebenen Puncte ein äquianharmonisches System bilden *).

§. 5.

Definitionen für ebene Curven.

28. Erklärung einer Ortscurve und einer Einhüllenden. Eine ebene Curve kann man sich sowol durch Bewegung eines Punctes, als durch die einer geraden Linie entstanden denken. Im ersten Falle heiszt sie der ***Ort*** aller Lagen des beweglichen Punctes, im zweiten Falle die ***einhüllende Curve*** oder kurz die ***Einhüllende*** aller Lagen der beweglichen Geraden **).

Eine Gerade, als Ort aller in ihr gelegener Puncte aufgefaszt, ist das einfachste Beispiel einer ***Ortscurve.***

Ein Punct, als Einhüllende aller in ihm sich schneidender Geraden aufgefaszt, bietet den einfachsten Fall der ***einhüllenden Curve.***

Eine ***Ortscurve*** oder ein ***Ort*** heiszt ***von der n-ten Ordnung,*** wenn eine beliebige Gerade ihn in n Puncten, die entweder reell oder imaginär, verschieden oder zusammenfallend sein können, schneidet. Der Ort der ersten Ordnung ist die ***Gerade;*** ein System von n Geraden ist ein Ort der n-ten Ordnung. Zwei Orte, die bezüglich von der Ordnung n und n' sind, bilden zusammen einen Ort von der Ordnung $n + n'$.

Ein Ort der n ten Ordnung kann von einer Geraden seiner

---

*) Painvin, *Équation des rapports anharmoniques etc.* (Nouvelles Annales de Mathématiques, t. 19. Paris 1860, p. 412).

**) Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn. Marcus. 1839. S. 200.

Erklärung gemäsz nur in n Puncten geschnitten werden; hat also eine Gerade mehr als n Puncte mit einem Orte gemein, so ist sie selbst ein Teil des Ortes, das heiszt, sämmtliche Puncte der Geraden sind auch Puncte des Ortes.

Eine Ortscurve von gegebener Ordnung heiszt *einfach,* wenn sie nicht aus Ortscurven einer niederen Ordnung zusammengesetzt ist.

Eine *Einhüllende* heiszt *von der n-ten Classe,* wenn durch einen beliebigen Punct n Lagen der eingehüllten Geraden gehen, das heiszt, wenn von dem beliebigen Puncte n *Tangenten*, die entweder reell oder imaginär, von einander verschieden oder zusammenfallend sein können, an die Einhüllende gezogen werden können. Die Einhüllende der ersten Classe ist der *Punct.* Ein System von n Puncten ist eine Einhüllende der n ten Classe. Zwei Einhüllende, deren Classen bezüglich n und n' sind, bilden zusammen eine Einhüllende der Classe $n + n'$.

Kann man von einem Puncte an eine Einhüllende der n-ten Classe mehr als n Berührende legen, so ist dieser Punct selbst ein Punct der Einhüllenden; es sind also alle Geraden, die durch den Punct gelegt werden können, Tangenten der Einhüllenden.

Eine Einhüllende von bestimmter Classe heiszt *einfach,* wenn sie nicht aus Einhüllenden von niederer Classe zusammengesetzt ist.

29. Doppeltangenten und Wendepuncte. Wir betrachten zuerst eine Ortscurve der n-ten Ordnung. Ist a eine der Lagen des erzeugenden Punctes, also ein Punct der Curve selbst, so heiszt die Gerade A, welche durch a und die folgende Lage des beweglichen Punctes geht, die *Tangente* oder *Berührende* der Curve in diesem Puncte. Der Ort der aufeinander folgenden Lagen eines beweglichen Punctes ist also auch die Einhüllende der Geraden, welche je zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen dieses Punctes verbindet.

Im Berührungspuncte a hat die Curve mit der Tangente zwei Puncte gemein (*zweipunctige Berührung*); beide Curven

haben also im Allgemeinen noch $n-2$ Durchschnittspuncte. Fallen zwei dieser $n-2$ Puncte in einen Punct b zusammen, so ist die Gerade A auch im Puncte b Tangente der Curve. Ist dies der Fall, so heiszt A eine ***Doppeltangente*** der Curve. Die Puncte a und b sind die Berührungspuncte*).

Nähert sich aber einer der $n-2$ Durchschnittspuncte dem Puncte a bis ins Unendliche, so hat die Gerade A daselbst eine ***dreipunctige Berührung*** mit der Curve. In diesem Falle heiszt die Gerade A eine ***stationäre***- oder eine ***Wendetangente***. Weil sie, wenn wir mit a, a', a'' die drei unendlich nahen Puncte bezeichnen, aus denen der Berührungspunct besteht, eigentlich zwei aufeinander folgende Tangenten aa' und $a'a''$ repräsentiert, so können wir auch sagen, sie sei eine Doppeltangente, deren Berührungspuncte a und a' einander unendlich nahe rücken. Denken wir uns die Curve aber durch Bewegung einer Geraden entstanden, so hört diese, wenn sie in die Lage a gekommen ist, auf, sich in dem einen Sinne zu bewegen, sie steht still, daher stationär, und bewegt sich dann im entgegengesetzten Sinne. Der Berührungspunct a der Wendetangente heiszt ein ***Inflections***- oder ein ***Wendepunct***, weil in ihm die Gerade A die Curve gleichzeitig berührt und schneidet, diese also von einer Seite der Geraden auf die andere übergeht.

30. Doppelpuncte und Spitzen. Wir betrachten zweitens die Einhüllende von der m-ten Classe. Ist A eine der Lagen der erzeugenden Geraden, das heiszt eine Tangente der Curve, so ist der Punct a, in welchem A von der unmittelbar folgenden Tangente geschnitten wird, der Berührungspunct der Geraden A mit der Curve. Die Einhüllende einer beweglichen Geraden ist also auch der Ort der Puncte, in denen sich je zwei aufeinander folgende Lagen dieser Geraden schneiden.

Durch einen beliebigen Punct laszen sich im Allgemeinen m Tangenten an die Curve legen. Fällt dieser Punct aber mit dem Puncte a der Curve zusammen, so sind zwei dieser Tangenten unmitelbar aufeinander folgende, und fallen mit der

*) Die beiden Berührungspuncte können imaginär werden, ohne dasz die Gerade A aufhört reell zu sein. Sie besitzt auch in diesem Falle alle Eigenschaften einer *Doppeltangente*.

Tangente A zusammen. Durch einen Punct der Curve gehen also auszerdem noch $m-2$ Geraden, welche die Curve in andern Puncten berühren.

Fallen zwei dieser $m-2$ Tangenten in eine Gerade B zusammen, so hat die Curve in a zwei Tangenten A und B; sie geht also zweimal durch a und bildet dort eine Schlinge. Die Geraden A und B berühren in a die beiden Zweige der Curve, die sich in ihm schneiden, und der Punct a heiszt dann ein *Doppel-* oder *zweifacher Punct**).

Fällt eine der $m-2$ Tangenten mit A zusammen, so repräsentiert diese Gerade drei aufeinander folgende Tangenten A, A', A''; der Punct a kann also als ein Doppelpunct betrachtet werden, deszen Tangenten A und A' zusammenfallen, deszen Schlinge sich also auf einen Punct reduciert. Ein solcher Punct heiszt *Spitze, Rückkehr-* oder *Stillstandspunct.* Er repräsentiert sowol den Durchschnittspunct der Tangenten A und A', als den der Tangenten A' und A''. Denken wir uns aber die Curve durch Bewegung eines Punctes entstanden, so wird dieser, wenn er in a ankommt, stillstehen, die Richtung seiner Bewegung ändern und von der einen Seite der Tangente A, der sogenannten *Rückkehrtangente,* auf die andere Seite übergehen.

Aus den *plückerschen Formeln*, die wir im Folgenden (§. 16) beweisen werden, folgt, dasz im Allgemeinen eine Ortscurve von bestimmter Ordnung weder Doppelpuncte noch Spitzen hat, dagegen Doppeltangenten und Wendepuncte besitzt, dasz dagegen im Allgemeinen der Einhüllenden einer bestimmten Classe die singulären Tangenten fehlen, dasz sie aber Doppel- und Stillstandspuncte besitzt.

Ist die Curve von eigentümlicher Natur, so kann sie auch singuläre Puncte und Tangenten von höherer Ordnung besitzen. *Eine Tangente heiszt r-fach*, wenn sie die Curve in r Puncten berührt, die entweder alle verschieden sind oder zum Teil oder

*) Die beiden Tangenten A und B können auch imaginär werden. Dann sind die beiden Zweige der Curve ebenfalls imaginär, nicht aber ihr Durchschnittspunct a. Dieser heiszt in einem solchen Falle ein *isolierter Punct*, und kann als ein unendlich kleines oder verschwindendes Oval aufgefaszt werden.

sämmtlich zusammenfallen können. ***Ein Punct heisst r-fach,*** wenn die Curve r-mal durch ihn hindurch geht; durch ihn gehen daher r Tangenten, die entweder alle verschieden sind, oder auch zum Teil oder sämmtlich zusammenfallen.

31. Vielfache Puncte und Tangenten. Ist a ein r-facher Punct einer Curve, so schneidet jede durch a gelegte Gerade die Curve in diesem Puncte r mal. Der Punct a gilt demnach für r Durchschnittspuncte der Geraden und der Curve. Berührt die Gerade aber im Puncte a einen der Zweige der Curve, die durch a gehen, so hat sie auch den zu a unendlich nahen Punct dieses Zweiges mit der Curve gemein. In diesem Falle zählt also a für $r+1$ Durchschnittspuncte der Curve mit der Tangente. Unter allen Geraden, die durch den Punct a gezogen werden können, gibt es daher nur r Gerade, nämlich die r Tangenten an die r Zweige der Curve, welche dort die Curve in $r+1$ zusammenfallenden Puncten schneiden. Haben daher $r+1$ Gerade diese Eigenschaft, so hat sie jede durch a gezogene Gerade ebenfalls und a ist ein $(r+1)$-facher Punct der Curve.

Ist A dem entsprechend eine r-fache Tangente der Curve, so zählt sie für r der Tangenten, die durch einen Punct in ihr selbst gelegt werden können. Aber sie zählt für $r+1$ Tangenten in Bezug auf die Durchschnittspuncte dieser Geraden mit der Curve. Von jedem Puncte der Geraden A gehen also r mit A selbst zusammenfallende Tangenten der Curve aus. Unter diesen Puncten sind nur r, von denen jedesmal $r+1$ Tangenten ausgehen, die mit A zusammenfallen. Gibt es in A noch einen Punct, der diese letztere Eigenschaft hat, so hat sie auch jeder andere Punct der Geraden A, und diese ist also eine $(r+1)$-fache Tangente.

Dies vorausgesetzt, folgen die Sätze:

> Lehrsatz I. ***Hat eine Curve der n-ten Ordnung einen n-fachen Punct a, so ist sie ein System von n Geraden, die sich in a schneiden.***

Denn jede Gerade, welche a mit einem beliebigen Puncte des Ortes verbindet, hat mit ihm $n+1$ Puncte gemein, ist also selbst ein Teil des betreffenden Ortes.

Ebenso entsteht:

Lehrsatz II. *Hat eine Einhüllende der m-ten Classe eine m-fache Tangente, so ist sie ein System von m auf dieser Geraden liegenden Puncten.*

Ferner:

Lehrsatz III. *Eine einfache Curve n-ter Ordnung kann, wenn sie einen* $(n-1)$*-fachen Punct hat, keinen Doppelpunct mehr haben.*

Denn die Gerade, welche diese beiden Puncte verbindet, hätte $n+1$ Durchschnittspuncte mit der Curve gemein.

Dem entspricht der Satz:

Lehrsatz IV. *Eine einfache Curve der m-ten Classe kann, ausser einer* $(m-1)$*-fachen Tangente, keine Doppeltangente haben.*

Denn sie würden für ihren Durchschnittspunct $m+1$ Tangenten repräsentieren.

§. 6.

Gemeinschaftliche Puncte und Tangenten zweier Curven.

32. Zahl der Durchschnittspuncte zweier Curven. In wieviel Puncten schneiden sich zwei Curven bezüglich von der Ordnung n und n'?

Als ein selbstverständliches Axiom angenommen, dasz die Zahl der Durchschnittspuncte allein von den Ordnungen n und n' abhängt, bleibt diese Zahl unverändert, wenn wir für die gegebenen Curven andere Orte derselben Ordnung substituieren. Setzen wir für die Curve der n'-ten Ordnung n' Gerade, so schneiden diese die Curve der n-ten Ordnung in $n.n'$ Puncten. Das liefert den Satz:

Lehrsatz I. *Zwei Curven bezüglich von der n-ten und n'-ten Ordnung schneiden sich in n.n' Puncten, die entweder reell oder imaginär, alle verschieden oder zum Teil oder sämmtlich zusammenfallend sein können.*

Man sagt, zwei Curven haben eine ***zweipunctige, dreipunctige, vierpunctige, fünfpunctige, sechspunctige, ..., r-punctige*** Berührung, wenn sie zwei, drei, vier, fünf, sechs, ..., r aufeinander folgende Puncte mit einander gemein haben.

a. Einfluss der vielfachen Puncte. Gehen durch einen Punct a r Zweige einer Curve und r' Zweige einer andern, so muss dieser Punct als Durchschnittspunct eines jeden Zweiges der ersten Curve mit jedem Zweige der zweiten Curve angesehen werden. Er zählt also für $r.r'$ zusammenfallende Durchschnittspuncte. Haben auszerdem ein Zweig der ersten Curve und ein Zweig der zweiten Curve in a eine gemeinschaftliche Tangente, so haben sie dort zwei gemeinschaftliche Puncte, und a gilt also für $r.r'+1$ Durchschnittspuncte. Haben allgemein die beiden Curven in a s gemeinschaftliche Tangenten, so zählt a für $r.r'+s$ gemeinschaftliche Puncte der beiden Curven.

In dem speciellen Falle, wenn r Tangenten der ersten Curve mit r' Tangenten der zweiten Curve im gemeinschaftlichen Puncte a in eine einzige Gerade T zusammenfallen, stellt dieselbe, $r'<r$ vorausgesetzt, r' gemeinschaftliche Tangenten vor, die Zahl der in a vereinigten Durchschnittspuncte ist also $r'(r+1)$. Diese Zahl kann aber noch gröszer werden, und zwar jedesmal, wenn die Gerade T eine innigere Berührung mit einer der beiden Curven eingeht, das heiszt, wenn sie dieselbe in mehr als $r+1$ oder $r'+1$ mit a zusammenfallenden Puncten schneidet. Hat z. B. die Gerade T in a mit der ersten Curve $2r$ Puncte, mit der zweiten $r'+1$ Puncte gemein, so gilt der Punct a als ein $r(r'+1)$-maliger Durchschnittspunct beider Curven. Hieraus ist leicht zu zeigen, dasz, wenn ein System K von r Curven der zweiten Ordnung, die den Punct a gemein haben und dort sämmtlich von einer Geraden T berührt werden, sowie eine beliebige andere Curve C, die r' Zweige besitzt, die sämmtlich durch a gehen und dort ebenfalls sämmtlich von der Geraden T berührt werden, gegeben sind, der Punct a in diesem Falle $r'+1$ Durchschnittspuncte der Curve C mit jeder der Curven des Systems K darstellt, dass er also für $r(r'+1)$ gemeinschaftliche Puncte der Curve C und des gesammten Systems der Curven K zählt.

b. Zahl der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven. Vollständig analog beweist man den Satz:

Lehrsatz II. *Zwei Curven bezüglich der m-ten und m'-ten Classe haben m.m' gemeinschaftliche Tangenten.*

Und so weiter*).

§. 7.

Anzahl der Bedingungen, durch welche eine Curve n-ter Ordnung oder m-ter Classe bestimmt wird.

33. Zahl der Bedingungen, denen eine Curve genügt, die einen r-fachen Punct hat. Soll eine Curve durch einen bestimmten Punct a gehen, so gilt dies offenbar für *eine Bedingung*.

Durch a legen wir eine Gerade A. Soll nun die Curve auch den a benachbarten Punct der Geraden A enthalten, soll also die Curve nicht blos durch a gehen, sondern auch die Gerade A in diesem Puncte berühren, so zählt das für *zwei Bedingungen*.

Wir legen durch a eine zweite Gerade A_1. Soll nun die Curve auszer den beiden benachbarten Puncten von A auch den Punct enthalten, der in der Geraden A_1 dem Puncte a unendlich nahe ist, so wird das für drei Bedingungen gelten; in diesem Falle schneidet aber jede durch a gezogene Gerade in diesem Puncte die Curve zweimal, a ist also ein Doppelpunct der Curve. Soll daher die Curve in a einen Doppelpunct haben, so zählt derselbe für *drei Bedingungen*.

Hat die Curve in a einen Doppelpunkt, was drei Bedingungen entspricht, so schneidet jede Gerade A, welche durch a geht, dieselbe in zwei in a zusammenfallenden Puncten. Soll

*) Die Eigenschaften der Curven von gegebener Classe leiten sich aus den Eigenschaften der Curven von bestimmter Ordnung und umgekehrt mittelst des *Princips der Dualität* ab, das wir als *selbstverständlich* und *absolut* ansehen, das heisst als unabhängig von einer speciellen Theorie der Transformation der Figuren.

die Curve nun durch einen dritten unmittelbar folgenden Punct von A gehen, soll sie also mit der Geraden in a drei Puncte gemein haben, so ist dies offenbar eine neue Bedingung. Verlangt man dasselbe für zwei andere Gerade A_1 und A_2, die ebenfalls durch a gehen, so haben wir im Ganzen sechs Bedingungen. Gehen aber durch a drei Gerade, deren jede die Curve in diesem Puncte dreimal schneidet, so ist dieser Punct ein dreifacher Punct der Curve. Soll also a ein dreifacher Punct der Curve sein, so zählt das für *sechs Bedingungen.*

Allgemein sei x_{r-1} die Zahl der Bedingungen, wenn die Curve in a einen $(r-1)$-fachen Punct haben soll. Jede Gerade A, die durch a geht, hat dann in diesem Puncte $r-1$ mit der Curve gemeinschaftliche Puncte. Soll nun diese Curve noch den nächstfolgenden Punct der Geraden A enthalten, das heiszt, soll die Gerade A r Puncte mit der Curve gemein haben, so ist das eine weitere Bedingung. Wird dasselbe für $r-1$ andere Gerade verlangt, die auch durch a gelegt sind, so haben wir im Ganzen $x_{r-1}+r$ Bedingungen. Gehen aber durch a r Gerade, deren jede in diesem Puncte r gemeinschaftliche Puncte mit der Curve hat, so ist nach Nr. 31. a ein r-facher Punct der Curve: folglich gilt, wenn der Punct a ein r-facher Punct der Curve sein soll, dies *für* $x_r = x_{r-1}+r$ *Bedingungen,* das heiszt es ist allgemein

$$x_r = \tfrac{1}{2}r(r+1).$$

34. Zahl der Bedingungen, die eine Curve vollständig bestimmen; Curvenreihen vom Index N. Durch wieviele Bedingungen ist nun eine Curve n-ter Ordnung bestimmt?

Soll die Curve einen n-fachen Punct a enthalten, so gilt das nach dem Obigen für $\tfrac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungen. Nun ist aber eine Curve n-ter Ordnung, die einen n-fachen Punct enthält nach Nr. 31. das System von n sich in diesem Puncte schneidender Geraden; diese sind sämmtlich bestimmt, sobald in jeder derselben ein zweiter Punct gegeben ist und somit ergibt sich der Satz:

Lehrsatz I. *Die Zahl der Bedingungen, welche eine Curve von gegebener Ordnung n vollständig bestimmen, ist gleich*

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)+n=\tfrac{1}{2}n(n+3)\ ^{*}).$$

Sind nur $\tfrac{1}{2}n(n+3)-1$ Bedingungen gegeben, so gibt es unendlich viele Curven der n-ten Ordnung, die dieselben erfüllen. Unter ihnen werden immer eine bestimmte Anzahl durch einen beliebigen Punct gehen. Diese Zahl sei $\varkappa$. Die gesammten Systeme dieser Curven, deren Zahl unendlich grosz ist, nennen wir ***eine Reihe von Curven der n-ten Ordnung und vom Index*** $\varkappa$ **).

So bilden z. B. die Tangenten einer Curve der m ten Classe eine Reihe der ersten Ordnung vom Index m.

Im Allgemeinen gibt es immer eine Curve, welche eine gegebene Reihe einhüllt, das heiszt in jedem Puncte eine der Curven der Reihe berührt. Die ganze Reihe läszt sich durch die stetige Bewegung einer Curve erzeugt denken, die gleichzeitig die Form und den Ort verändert und dabei stets den gegebenen Bedingungen genügt. Die Puncte, in denen eine Curve einer Reihe, die ihr unmittelbar benachbarte schneidet, sind gleichzeitig die Berührungspuncte zwischen der ersten Curve und der Einhüllenden der Reihe.

In einer Reihe von Curven n-ter Ordnung kann man jede einzelne als von dem Werte einer bestimmten variablen Grösze abhängig betrachten, wie etwa, um ein Beispiel anzuführen, von dem Producte der anharmonischen Verhältnisze

$$(abcx_1).(abcx_2)\ldots.(abcx_n),$$

worin a, b, c drei gegebene Puncte in gerader Linie bedeuten, und x_1, x_2, x_3, ..., x_n die Puncte sind, in denen diese Gerade die Curve schneidet.

Dieser Grösze, deren verschiedene Werte zur Bestimmung der verschiedenen Curven ein und derselben Reihe dienen, pflegt man den Namen ***Parameter*** zu geben.

---

*) Ebenso ist eine Curve m-ter Classe durch $\tfrac{1}{2}m(m+3)$ Bedingungen bestimmt.

**) *Jonquières*, *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelquonque.* (Journal de M. *Liouville*, Avril 1861. pag. 113).

Hängt die Curve von irrationalen Functionen des Parameters ab, so werden die verschiedenen Werte dieser Functionen, es seien r, ebenso viele Curven bestimmen, welche alle ein und demselben Werte des Parameters entsprechen. Die Gruppe dieser r Curven kann als ein Ort der $r.n$-ten Ordnung betrachtet werden, und die gegebene Reihe als eine solche von der $r.n$-ten Ordnung, in welcher jeder Wert des Parameters nur eine einzige Curve individualisiert. Eine solche Reihe kann man *zusammengesetzt* nennen mit Rücksicht auf die Curven n-ter Ordnung, und *einfach* in Bezug auf die Gruppen oder Curven der $r.n$-ten Ordnung. Daher ist klar, dasz der Fall einer zusammengesetzten Reihe, aus diesem Gesichtspuncte aufgefaszt, auf den der einfachen Reihen zurückgeführt werden kann. Wir werden im Folgenden daher nur von letzteren reden, gleichgültig ob die Elemente derselben einfache Curven oder Gruppen von Curven sind.

35. Gröszte Zahl der Doppelpuncte. Aus dem in Nr. 34. bewiesenen Satze ergibt sich folgendes weitere Theorem:

Lehrsatz II. *Eine einfache Curve der n-ten Ordnung kann mit Einschlusz der Spitzen nur $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpuncte haben.*

Hätte sie nämlich einen Doppelpunct mehr, so könnte man durch diese $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ und durch andere $n-3$ Puncte dieser Curve, das heiszt im Ganzen durch $\frac{1}{2}(n-2)(n-2+3)$ Puncte eine Curve der $(n-2)$-ten Ordnung legen, welche mit der gegebenen Curve

$$2\{\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\}+n-3=n(n-2)+1$$

Durchschnittspuncte hätte, was unmöglich ist, wenn die gegebene Curve nicht aus Curven einer niedrigeren Ordnung zusammengesetzt ist*).

§. 8.

Die Porismen Chasles' u. das Theorem von Carnot.

36. Das Porisma Chasles' für eine Ortscurve. Es

*) *Plücker*, *a. a. O.*, S. 215.

sei (Fig. VI.) *abc* ein Dreieck. Ein beliebiger Punct $\mathfrak{a}$ von *bc* ist durch das Verhältnisz $\frac{\mathfrak{a}c}{\mathfrak{a}b}$, ebenso ein Punct $\mathfrak{b}$ auf *ca* durch das Verhältnisz $\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a}$ gegeben. Ziehen wir die Geraden $a\mathfrak{a}$ und $b\mathfrak{b}$, und schneiden dieselben sich in *m*, so ist dieser Punct vollständig durch die beiden Verhältnisze $\frac{\mathfrak{a}c}{\mathfrak{a}b}$ und $\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a}$ bestimmt. Diese Verhältnisze betrachten wir als eine Art *Coordinaten* des Punctes *m*. Die Gerade *cm* schneidet *ab* im Puncte $\mathfrak{c}$, wodurch ein drittes Verhältnisz $\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}$ entsteht. Diese drei Verhältnisze sind unter einander durch eine einfache Relation verbunden. Man hat nämlich nach dem bekannten *Theorem des Ceva* *):

$$\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a} : \frac{\mathfrak{a}c}{\mathfrak{a}b} = -\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}.$$

Liegt der Punct *m* auf einer der Seiten *ca* oder *cb*, so verschwindet eine der Coordinaten, liegt *m* dagegen auf *ab*, so werden beide Coordinaten unendlich grosz, aber ihr Verhältnisz, ausgedrückt durch $-\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}$, ist eine endliche Grösze.

Laszen wir jetzt den Punct *m* sich auf einer Geraden bewegen, so erzeugen die Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf *cb* und *ca* zwei projectivische Punctreihen, da jeder Lage von $\mathfrak{a}$ nur eine Lage von $\mathfrak{b}$ entspricht und umgekehrt. Es besteht folglich zwischen den Verhältniszen $\frac{\mathfrak{a}c}{\mathfrak{a}b}$ und $\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a}$, durch welche die Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt werden, eine Gleichung, die für beide vom ersten Grade ist. Da nun für den Punct, in welchem die gegebene Grade *ab* schneidet, beide Verhältnisze $\frac{\mathfrak{a}c}{\mathfrak{b}a}$ und $\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{a}b}$ unendlich werden, so kann diese Gleichung nur die Form:

$$\lambda \frac{\mathfrak{a}c}{\mathfrak{a}b} + \mu \frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a} + \nu = 0 \tag{1}$$

*) Von *Ceva* im Jahre 1678 gegeben. Man sehe *Chasles. Aperçu historique*, S. 299 der deutschen Uebersetzung.

haben. Diese Relation zwischen den Coordinaten eines beliegen Punctes m einer gegebenen Geraden heisze ***die Gleichung der Geraden.***

Untersuchen wir jetzt, von welcher Form die Relation zwischen den Coordinaten des Punctes m ist, wenn derselbe sich auf einer Curve der n-ten Ordnung bewegt. Eine Gerade, deren Gleichung die (1) sei, schneidet die Curve in n Puncten, folglich musz die Gleichung (1) und die gesuchte Gleichung von n Coordinatenpaaren $\frac{ac}{ab}$, $\frac{bc}{ba}$ gleichzeitig erfüllt werden, die gesuchte Relation ist daher notwendig vom n-ten Grade für jede der beiden Coordinaten des Punctes m, und da die Zahl der Bedingungen, welche eine Curve n-ter Ordnung bestimmen $\frac{1}{2}n(n+3)$ ist, so musz die fragliche Relation $\frac{1}{2}n(n+3)$ von einander unabhängige Coefficienten haben.

Hieraus ergibt sich der Satz:

Lehrsatz I. *Bewegt sich ein Punct m auf einer Curve der n-ten Ordnung, so besteht zwischen den veränderlichen Coordinaten des Punctes m eine bestimmte Relation von der Form:*

(2)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\left(\frac{ac}{ab}\right)^n + \{\beta + \beta_1 \frac{bc}{ba}\}\left(\frac{ac}{ab}\right)^{n-1} \\ \quad + \{\gamma + \gamma_1 \frac{bc}{ba} + \gamma_2\left(\frac{bc}{ba}\right)^2\}\left(\frac{ac}{ab}\right)^{n-2} \\ \quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + \varrho + \varrho_1 \frac{bc}{ba} + \varrho_2\left(\frac{bc}{ba}\right)^2 + \dots + \varrho_n\left(\frac{bc}{ba}\right)^n \end{array}\right\} = 0.$$

welche man die Gleichung des Ortes des Punctes m nennen kann.

Und dem entsprechend:

Lehrsatz II. *Bewegt sich ein Punct m der Art, dasz zwischen seinen Coordinaten eine Gleichung von der Form (2) besteht, so ist der Ort des Punctes m eine Curve der n-ten Ordnung.*

37. **Das Porisma Chasles' für eine Einhüllende.** Es sei wiederum *abc* ein Dreieck. Ein Punct $\mathfrak{a}$ in *bc*, bestimmt durch das Verhältnisz $\frac{\mathfrak{a}b}{\mathfrak{a}c}$, und ein Punct $\mathfrak{b}$ in *ac*, bestimmt durch das Verhältnisz $\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}$, bestimmen zusammen eine Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, welche demgemäsz durch die Verhältnisze $\frac{\mathfrak{a}b}{\mathfrak{a}c}$ und $\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}$ vollständig gegeben ist. Diese Verhältnisze nennt man *Coordinaten* der Geraden. Sie trifft die dritte Seite *ab* in einem dritten Puncte $\mathfrak{c}$; dadurch entsteht ein neues Verhältnisz $\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}$. Diese drei Verhältnisze sind nach dem Satz des *Menelaus* *) durch die einfache Relation:

$$\frac{\mathfrak{a}b}{\mathfrak{a}c}:\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}=\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}$$

verbunden. Geht die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ durch einen der Puncte *a* und *b*, so verschwindet eine der beiden Coordinaten, geht dagegen die Gerade durch *c*, so werden beide Coordinaten unendlich grosz, aber ihr Verhältnisz bleibt endlich gleich $\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}$.

Laszen wir jetzt die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ sich um einen festen Punct drehen, so erzeugen die beiden Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei projectivische Punctreihen. Es musz also zwischen den Coordinaten der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ eine Gleichung des ersten Grades statt haben. Da nun, wenn die bewegliche Gerade durch *c* geht, beide Coordinaten unendlich werden, so hat die Gleichung die Form:

$$\lambda\frac{\mathfrak{a}b}{\mathfrak{a}c}+\mu\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}+\nu=0. \tag{1*}$$

Diese Relation zwischen den Coordinaten einer Geraden, die sich um einen festen Punct dreht, nennen wir die *Gleichung des Punctes*, als Einhüllende der beweglichen Geraden aufgefaszt.

Die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bewege sich ferner so, dasz sie von einer Curve der *m*-ten Classe umhüllt werde. Welche Relation be-

*) *Menelaus*, *Sphaerica*, III, 1.

steht dann zwischen den Coordinaten der beweglichen Geraden? Von einem beliebigen Puncte, deszen Gleichung die (1*) sei, gehen m Tangenten der Curve aus, das heiszt m Lagen der beweglichen Geraden. Die gesuchte Relation und die Gleichung (1*) müszen also gleichzeitig durch m Systeme von Werten der Coordinaten erfüllt werden, woraus sich ergibt, dasz die gesuchte Relation für jede der beiden Coordinaten vom m-ten Grade sein musz. Da nun aber die Curve m-ter Classe durch $\frac{1}{2}m(m+3)$ Bedingungen bestimmt ist, so musz die Relation $\frac{1}{2}m(m+3)$ von einander unabhängige Coefficienten enthalten.

Hieraus folgert sich der Satz:

Lehrsatz III. *Bewegt sich eine Gerade so, dass sie von einer Curve der m-ten Classe umhüllt wird, so besteht zwischen den Coordinaten der beweglichen Geraden beständig eine Relation von der Form:*

(2*)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{ab}{ac}\right)^m + \{\beta+\beta_1\frac{ba}{bc}\}\left(\frac{ab}{ac}\right)^{m-1} \\ \quad + \{\gamma+\gamma_1\frac{ba}{bc}+\gamma_2\left(\frac{ba}{bc}\right)^2\}\left(\frac{ab}{ac}\right)^{m-2} \\ \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + \varrho+\varrho_1\frac{ba}{bc}+\varrho_2\left(\frac{ba}{bc}\right)^2+\cdots\cdots+\varrho_m\left(\frac{ba}{bc}\right)^m\end{array}\right\} = 0,$$

die man als die Gleichung der Einhüllenden der beweglichen Geraden ansehen kann.

Umgekehrt ergibt sich noch:

Lehrsatz IV. *Bewegt sich eine Gerade so, dass ihre Coordinaten beständig einer Gleichung von der Form* (2*) *genügen, so ist die Einhüllende dieser Geraden eine Curve der m-ten Classe.*

Die in den beiden letzten Nummern bewiesenen wichtigen Porismen sind von *Chasles* gegeben*).

*) *Aperçu historique*, p. 280.

38. **Das Theorem von Carnot.** Wir wenden uns wieder zur Gleichung (2) Nr. 36. In den Puncten

$$a,\ a',\ a'',\ \ldots,\ a^{(n-1)},$$

in denen die Curve, welche sie darstellt, die Gerade cb schneidet, wird die Coordinate $\frac{bc}{ba}=0$, die andere Coordinate folgt aus der Gleichung, wenn man $\frac{bc}{ba}=0$ in dieselbe substituiert. Auf diese Weise entsteht:

$$\frac{ac}{ab}\cdot\frac{a'c}{a'b}\cdot\frac{a''c}{a''b}\cdots\frac{a^{(n-1)}c}{a^{(n-1)}b}=(-1)^n\frac{\varrho}{\alpha}.$$

Ebenso erhält man für die Puncte

$$b,\ b',\ b'',\ \ldots,\ b^{(n-1)},$$

in denen die Curve die Gerade ca schneidet:

$$\frac{bc}{ba}\cdot\frac{b'c}{b'a}\cdot\frac{b''c}{b''a}\cdots\frac{b^{(n-1)}c}{b^{(n-1)}a}=(-1)^n\frac{\varrho}{\varrho_n}.$$

Dividiert man ferner Gleichung (2) in Nr. 36. durch $\left(\frac{ac}{ab}\right)^n$ und beachtet den Satz des *Ceva*, so entsteht:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta\frac{ab}{ac}+\beta_1\frac{cb}{ca}\\ +\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ +\varrho_n\left(-\frac{cb}{ca}\right)^n+\varrho_{n-1}\left(-\frac{cb}{ca}\right)^{n-1}\cdot\frac{ab}{ac}+\cdots+\varrho\left(\frac{ab}{ac}\right)^n\end{array}\right\}=0.$$

Setzen wir hierin $\frac{ab}{ac}=0$, so erhalten wir die Durchschnittspuncte

$$c,\ c',\ c'',\ \ldots,\ c^{(n-1)}$$

der Curve und der Geraden ab; folglich ist auch:

$$\frac{cb}{ca}\cdot\frac{c'b}{c'a}\cdot\frac{c''b}{c''a}\cdots\cdots\frac{c^{(n-1)}b}{c^{(n-1)}a}=\frac{\alpha}{\varrho_n}.$$

Diese drei Resultate mit einander verbunden liefern die Gleichung:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{ab}{ac}\cdot\frac{a'b}{a'c}\cdot\frac{a''b}{a''c}\cdots\frac{a^{(n-1)}b}{a^{(n-1)}c} \\ \times\frac{bc}{ba}\cdot\frac{b'c}{b'a}\cdot\frac{b''c}{b''a}\cdots\frac{b^{(n-1)}c}{b^{(n-1)}a} \\ \times\frac{ca}{cb}\cdot\frac{c'a}{c'b}\cdot\frac{c''a}{c''b}\cdots\frac{c^{(n-1)}a}{c^{(n-1)}b} \end{array}\right\} = 1.$$

Dadurch ist das berühmte Theorem von ***Carnot****) bewiesen:

Lehrsatz V. ***Schneidet eine Curve der n-ten Ordnung die Seiten bc, ca, ab eines Dreiecks abc bezüglich in den Puncten***

$$a,\ a',\ a'',\ \ldots,\ a^{(n-1)};$$
$$b,\ b',\ b'',\ \ldots,\ b^{(n-1)};$$
$$c,\ c',\ c'',\ \ldots,\ c^{(n-1)},$$

so besteht immer die Gleichung (3).

Dieser Satz läszt sich auf jedes beliebige Polygon erweitern.

39. Anwendung auf Curven zweiter Ordnung. Ist $n=1$, so fällt das Theorem von ***Carnot*** mit dem Satze des ***Menelaus*** zusammen. Ist $n=2$, so ergibt sich daraus eine Eigenschaft von ***sechs*** Puncten einer Curve zweiter Ordnung. Da nun aber eine Curve der zweiten Ordnung nach Nr. 34. durch fünf Puncte bestimmt ist, so hat man umgekehrt den Satz:

Lehrsatz VI. ***Bestimmt man auf den Seiten bc, ca, ab eines Dreiecks bezüglich die Puncte***

$$a,\ a';\ b,\ b';\ c,\ c'$$

so, dass zwischen ihnen die Gleichung:

$$(4)\qquad \frac{ab\,.\,a'b\,.\,bc\,.\,b'c\,.\,ca\,.\,c'a}{ac\,.\,a'c\,.\,ba\,.\,b'a\,.\,cb\,.\,c'b} = 1$$

---

*) *Géométrie de position*, Paris. 1803. p. 291. Deutsch von *Schumacher*, Altona. 1808—1810, mit Zusätzen von *Gauss*.

besteht, so liegen die sechs Puncte a, a'; b, b'; c, c' auf einer Curve der zweiten Ordnung.

Fallen die Puncte a', b', c' respective mit a, b, c zusammen, berührt also die Curve die Seiten des Dreiecks in a, b und c, so geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{ab.bc.ca}{ac.ba.cb} = \pm 1.$$

Das obere Zeichen kann nicht gelten, da sonst nach dem Satze des ***Menelaus*** die Puncte a, b, c in gerader Linie liegen müszten, und eine Curve zweiter Ordnung nur zwei Puncte mit einer Geraden gemein haben kann. Nehmen wir also das negative Zeichen, so folgt, unter Anwendung des Satzes von ***Ceva,*** dasz die drei Geraden aa, bb, cc sich in einem Puncte schneiden. Folglich haben wir den Satz:

Lehrsatz VII. ***Ist eine Curve zweiter Ordnung einem Dreieck eingeschrieben, so schneiden sich die Geraden, welche die Scheitel mit den gegenüberliegenden Berührungspuncten verbinden, in demselben Puncte.***

a. Anwendung auf Curven dritter Ordnung. Für $n = 3$ erhalten wir aus dem Theorem des ***Carnot*** das neue:

Lehrsatz VIII. ***Schneiden die Seiten bc, ca, ab eines Dreiecks abc eine Curve der dritten Ordnung bezüglich in den Puncten***

$$a,\ a',\ a'';\ b,\ b',\ b'';\ c,\ c',\ c'',$$

so findet zwischen den entstehenden Abschnitten der drei Seiten die Gleichung statt:

$$(5) \qquad \frac{ab.a'b.a''b.bc.b'c.b''c.ca.c'a.c''a}{ac.a'c.a''c.ba.b'a.b''a.cb.c'b.c''b} = 1.$$

Liegen nun die sechs Puncte

$$a,\ a';\ b,\ b';\ c,\ c'$$

in einer Curve der zweiten Ordnung, so gilt für sie die Gleichung (4). Dividieren wir durch diese die Gleichung (5), so entsteht:

$$\frac{a''b \,.\, b''c \,.\, c''a}{a''c \,.\, b''a \,.\, c''b} = 1,$$

und die Puncte a'', b'', c'' liegen daher in gerader Linie. Liegen umgekehrt a'', b'', c'' in gerader Linie, so befinden sich die übrigen sechs Durchschnittspuncte auf einer Curve zweiter Ordnung.

b. Fortsetzung. Tangentialpunct. Besteht der Ort der zweiten Ordnung $aa'bb'cc'$ aus dem Systeme zweier zusammenfallender Geraden, so geht der obige Satz in den folgenden über:

Lehrsatz IX. *Legt man durch die Puncte, in denen eine Curve dritter Ordnung von einer Geraden geschnitten wird, Tangenten an die Curve, so schneiden diese die Curve in drei neuen Puncten, die in einer zweiten Geraden liegen*).*

Berührt eine Gerade eine Curve der dritten Ordnung im Puncte a und schneidet sie einfach im Puncte a'', so heiszt der Punct a'' der *Tangentialpunct* von a; wir können daher auch sagen:

Lehrsatz X. *Liegen drei Puncte einer Curve der dritten Ordnung in einer Geraden R, so liegen ihre Tangentialpuncte in einer zweiten Geraden S.*

Die Gerade S heiszt der Geraden R *beigeordnet* (retta sattelite), diese dagegen heiszt die *primitive*. Der Durchschnittspunct beider Geraden heiszt der *beigeordnete Punct* (punto sattelite) von R.

Ist R eine Tangente der Curve dritter Ordnung, so fällt der beigeordnete Punct mit dem Tangentialpunct des Berührungspunctes zusammen, und die beigeordnete Gerade ist die Tangente der Curve im beigeordneten Puncte.

c. Fortsetzung. Wird die Gerade $a''b''c''$ eine Wendetangente der Curve der dritten Ordnung, so ergibt sich der Satz:

*) Man sehe die Abhandlung *Maclaurins. Ueber die Curven der dritten Ordnung*, übersetzt von *Jonquières*: *Mélanges de Géométrie pure*, Paris. 1856. p. 223.

Lehrsatz XI. *Zieht man aus einem Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung drei beliebige Transversalen, so schneiden diese die Curve in sechs Puncten, die in einer Curve der zweiten Ordnung liegen.*

Liegen von diesen sechs Puncten drei in einer Geraden, so liegen die drei übrigen ebenfalls in einer Geraden. Folglich gilt dann der Satz:

Lehrsatz XII. *Zieht man durch einen Wendepunct einer Curve dritter Ordnung drei Tangenten an die Curve, so liegen die drei Berührungspuncte in gerader Linie*).*

d. Fortsetzung. Liegen die Puncte a'', b'', c'' in gerader Linie, so liegen die andern sechs a, a'; b, b'; c, c' in einer Curve der zweiten Ordnung; fallen nun von diesen drei a', b', c' in einen Punct zusammen, so ergibt sich der neue Satz:

Lehrsatz XIII. *Berühren drei Transversalen, die durch einen Punct a' einer Curve dritter Ordnung gehen, diese in drei Puncten a'', b'', c'' in gerader Linie, und gleichzeitig in drei andern Puncten a, b, c, so hat die Curve der dritten Ordnung in a' eine dreipunctige Berührung mit einer Curve zweiter Ordnung, die gleichzeitig durch die Puncte a, b, c geht.*

Fallen a'', b'', c'' in einen Wendepunct zusammen, so folgt aus dem letzten Satze der neue:

Lehrsatz XIV. *Jede Transversale, welche durch einen Wendepunct einer Curve dritter Ordnung gezogen ist, schneidet dieselbe in zwei Puncten, in welchen diese Curve mit ein und derselben Curve zweiter Ordnung zwei dreipunctige Berührungen hat**).*

Hieraus folgt noch:

Lehrsatz XV. *Zieht man durch einen Wendepunct einer Curve dritter Ordnung eine Berührende an die Curve, so hat diese in ihrem zweiten Berührungspuncte*

*) *Maclaurin, a. a. O.*, p. 226.

**) *Poncelet, Analyse des transversales.* (*Crelles* Journal T. 8. Berlin. Reimer. 1832. S. 129—135.)

eine sechspunctige Berührung mit einer Curve der zweiten Ordnung*).

40. **Der Satz von Chasles über die Tangenten einer Curve.** Wir betrachten jetzt zweitens eine ***Einhüllende*** der m-ten Classe. Sie sei gegeben durch die Gleichung (2*) in Nr. 38. Um die Tangenten der Curve, welche durch a gehen, zu erhalten, müszen wir in der Gleichung $\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}=0$ setzen. Die resultierende Gleichung gibt die Werte der zweiten Coordinaten der Puncte

$$a,\ a',\ a'',\ \ldots\ldots,\ a^{(m-1)},$$

in welchen bc durch die Tangenten geschnitten wird, die durch a gehen. Auf diese Weise entsteht:

$$\frac{ab}{ac}\cdot\frac{a'b}{a'c}\cdot\frac{a''b}{a''c}\cdots\cdots\frac{a^{(m-1)}b}{a^{(m-1)}c}=(-1)^m\frac{\varrho}{\alpha}.$$

Für die Puncte

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}'',\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{b}^{(m-1)},$$

in denen ca durch die Tangenten, welche durch b gehen, geschnitten wird, erhalten wir die entsprechende Relation:

$$\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}\cdot\frac{\mathfrak{b}'a}{\mathfrak{b}'c}\cdot\frac{\mathfrak{b}''a}{\mathfrak{b}''c}\cdots\cdots\frac{\mathfrak{b}^{(m-1)}a}{\mathfrak{b}^{(m-1)}c}=(-1)^m\frac{\varrho}{\varrho_m}.$$

Dividiert man die Gleichung (2*) in Nr. 38. durch $\left(\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}\right)^m$ und beachtet die Gleichung

$$\frac{ab}{ac}:\frac{\mathfrak{b}a}{\mathfrak{b}c}=\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a},$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}\right)^m+\beta\left(\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}\right)^{m-1}\cdot\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a}+\beta_1\left(\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}\right)^{m-1}\\ \quad+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad+\varrho_m+\varrho_{m-1}\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a}+\ldots\ldots+\varrho\left(\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a}\right)^m\end{array}\right\}=0.$$

---

*) **Plücker**, *Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung.* (**Crelles** Journal T. 34. Berlin, Reimer. 1847. S. 330.)

Setzen wir hierin $\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a} = 0$, so ergeben sich hieraus die Puncte

$$\mathfrak{c},\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{c}'',\ \ldots,\ \mathfrak{c}^{(m-1)},$$

in denen ab von den Tangenten die durch c gehen geschnitten wird. Es ist also:

$$\frac{\mathfrak{c}b}{\mathfrak{c}a}\cdot\frac{\mathfrak{c}'b}{\mathfrak{c}'a}\cdot\frac{\mathfrak{c}''b}{\mathfrak{c}''a}\cdots\frac{\mathfrak{c}^{(m-1)}b}{\mathfrak{c}^{(m-1)}a} = (-1)^m\frac{\varrho_m}{\alpha}.$$

Diese drei Resultate mit einander verglichen liefern die Relation:

$$(3^*)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\mathfrak{a}b}{\mathfrak{a}c}\cdot\frac{\mathfrak{a}'b}{\mathfrak{a}'c}\cdot\frac{\mathfrak{a}''b}{\mathfrak{a}''c}\cdots\frac{\mathfrak{a}^{(m-1)}b}{\mathfrak{a}^{(m-1)}c} \\ \times\frac{\mathfrak{b}c}{\mathfrak{b}a}\cdot\frac{\mathfrak{b}'c}{\mathfrak{b}'a}\cdot\frac{\mathfrak{b}''c}{\mathfrak{b}''a}\cdots\frac{\mathfrak{b}^{(m-1)}c}{\mathfrak{b}^{(m-1)}c} \\ \times\frac{\mathfrak{c}a}{\mathfrak{c}b}\cdot\frac{\mathfrak{c}'a}{\mathfrak{c}'b}\cdot\frac{\mathfrak{c}''a}{\mathfrak{c}''b}\cdots\frac{\mathfrak{c}^{(m-1)}a}{\mathfrak{c}^{(m-1)}b} \end{array}\right\} = (-1)^m.$$

Hierin liegt der Satz*):

Lehrsatz XVI. *Zieht man durch die drei Scheitel a, b, c eines Dreiecks abc Tangenten an eine Curve der m-ten Classe, welche die Seiten bc, ca, ab bezüglich in den Puncten:*

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}'',\ \ldots,\ \mathfrak{a}^{(m-1)};$$
$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}'',\ \ldots,\ \mathfrak{b}^{(m-1)};$$
$$\mathfrak{c},\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{c}'',\ \ldots,\ \mathfrak{c}^{(m-1)}$$

schneiden, so besteht zwischen den Abschnitten, welche durch diese Puncte auf den Seiten gebildet werden, immer die Relation (3*).

Für $m = 1$ enthält Gleichung (3*) das Theorem des *Ceva*.

Für $m = 2$ hat man eine Eigenschaft von sechs Tangenten einer Curve zweiter Classe, und leitet daraus den Satz ab:

---

*) *Chasles*, *Géométrie supérieure*, Paris, Bachelier. 1852. p. 361. Deutsch von *Schnuse*. Braunschweig. Leibrock. 1856.

Lehrsatz XVII. ***Ist eine Curve zweiter Classe einem Dreieck umschrieben, so schneiden die Tangenten in den Scheitelpuncten die gegenüberstehenden Seiten in drei Puncten, die in gerader Linie liegen.***

U. s. w., u. s. w.

41. Curvenbüschel. Es seien

$$U=0, \quad U'=0$$

die zu Gleichung (2) Nr. 36. analogen Gleichungen zweier Curven der n-ten Ordnung. Ist λ eine beliebige Grösze, so stellt die Gleichung

$$U+\lambda U'=0$$

offenbar eine neue Curve der n-ten Ordnung vor. Die Werte der Coordinaten $\frac{ac}{ab}$ und $\frac{bc}{ba}$, welche U und U' annullieren, erfüllen auch die Gleichung $U+\lambda U'=0$; folglich liegen die n^2 Durchschnittspuncte der beiden Curven $U=0$ und $U'=0$ *alle* auf der Curve, deren Gleichung $U+\lambda U'=0$*) ist. Da nun diese letzte Gleichung für *jeden* der unendlich vielen Werte von λ eine Curve der n-ten Ordnung repräsentiert, so gilt der Satz:

Lehrsatz XVIII. ***Durch die n^2 Durchschnittspuncte zweier Curven der n-ten Ordnung lassen sich unendlich viele Curven derselben Ordnung legen.***

In Nr. 34. ist gezeigt, dasz eine Curve der n-ten Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Bedingungen bestimmt ist. Der letzte Satz zeigt nun, dasz im Allgemeinen durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Puncte nur *eine einzige* Curve der n-ten Ordnung gelegt werden kann. Gingen nämlich zwei Curven n-ter Ordnung durch diese Puncte, so müszten nach obigem Satze noch unendlich viele andere Curven derselben Ordnung durch sie gezogen werden können.

Durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Puncte gehen nach Nr. 34. eine unbegrenzte Anzahl Curven n-ter Ordnung, deren zwei sich noch in andern

*) *Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, Paris. 1818. p. 28.

$$n^2 - \{\tfrac{1}{2}n(n+3) - 1\} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Puncten schneiden. Diese gehören daher auch allen andern durch die gegebenen Puncte gelegten Curven an. Das gibt den Satz:

Lehrsatz XIX. *Durch* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *beliebige gegebene Puncte gehen eine unbegrenzte Anzahl Curven n-ter Ordnung hindurch, die ausserdem noch* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *bestimmte Puncte gemein haben*).*

Eine jede dieser Curven ist völlig individualisiert, sobald auszer den gegebenen $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Puncten noch ein beliebiger weiterer Punct derselben gegeben ist. Von der unbegrenzten Zahl der Curven, die durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Puncte gelegt werden können, geht also nur eine durch einen weitern beliebigen Punct. Der *Index* der durch diese unbegrenzte Anzahl Curven gebildeten Reihe (S. Nr. 34.) ist daher gleich 1. Eine solche Reihe heiszt ein *Curvenbüschel.* Unter einem Curvenbüschel n-ter Ordnung versteht man also das System der unendlich vielen Curven, die durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ beliebig gegeben und damit auch durch noch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bestimmte Puncte gehen.

Die Gesammtheit der n^2 gemeinschaftlichen Puncte eines *Curvenbüschels* heiszt die *Basis des Büschels.*

Entsprechende Eigenschaften greifen bei den Curven einer bestimmten Classe Platz. Die m^2 gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven m-ter Classe berühren eine unbegrenzte Anzahl anderer Curven derselben Classe, es gibt aber nur eine Curve der m-ten Classe, welche $\frac{1}{2}m(m+3)$ Gerade berührt. Alle Curven der m-ten Classe, die $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ gegebene Gerade berühren, haben noch $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ bestimmte gemeinschaftliche Tangenten, u. s. w.

§. 9.

Weitere Fundamentalsätze über ebene Curven.

42. Der Satz von Jacobi. Von den $\frac{1}{2}n(n+3)$ Puncten, welche eine einfache Curve der n-ten Ordnung bestimmen, kön-

*) Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen.* 1. Bd. Essen. Bädecker. 1828. S. 229.

nen nur höchstens $n.p-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ in einer Curve der p-ten Ordnung liegen, $p<n$. Denn liegen

$$n.p-\tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)+1$$

Puncte in einer Curve der p-ten Ordnung, $p<n$, so bestimmen die noch übrigen

$$\tfrac{1}{2}n(n+3)-n.p+\tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)-1=\tfrac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$$

Puncte nach Nr. 34. eine Curve der $(n-p)$-ten Ordnung, die mit der gegebenen Curve der p-ten Ordnung einen Ort der n-ten Ordnung darstellt, der durch sämmtliche gegebene Puncte geht. Folglich gilt der Satz:

Lehrsatz I. *Auf einer Curve p-ter Ordnung kann man nicht mehr als*

$$np-\tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

Puncte willkürlich annehmen, wenn durch dieselben eine einfache Curve der n-ten Ordnung, $n<p$, gelegt werden soll *).

43. Der Satz von Plücker. Es seien zwei Curven von den Ordnungen p *und* q gegeben und es sei $p+q=n$. Auf dem Orte der n-ten Ordnung, den beide Curven zusammen darstellen, nehmen wir $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ willkürliche Puncte an. Durch diese Puncte geht eine unbegränzte Anzahl von Curven der n-ten Ordnung (Nr. 41), die noch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ weitere Puncte gemein haben, welche auf beiden gegebenen Curven verteilt liegen. Von den $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ willkürlichen Puncten wollen wir annehmen, es lägen $n.p-g$ auf der Curve der p-ten und $n.q-h$ auf der Curve der q-ten Ordnung, so müszen nach dem Obigen g und h zwei positive ganze Zahlen sein, die der Bedingung:

$$(1) \qquad g+h=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

genügen. Sollen die Curven nun durch die Puncte, die in ihnen liegen, bestimmt sein, so müszen die Beziehungen

*) Jacobi, *De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum cet.* (Crelles Journal T. 15. Berlin. Reimer. 1836. S. 292).

$$n.p - g \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2}p(p+3),$$

$$n.q - h \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2}q(q+3)$$

bestehen. Aus ihnen folgt:

$$g \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}p(p+3) + p.q,$$

$$h \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}q(q+3) + p.q.$$

Setzen wir hierin die Werte ein, welche für g und h aus Gleichung (1) folgen, so gibt das:

$$h \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2}(q-1)(q-2),$$

$$g \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2),$$

und damit sind die Grenzen gegeben, zwischen denen g und h liegen müszen. So ist g eingeschloszen durch die untere Grenze $\tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)$ und die obere Grenze $\tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)+p(n-p)-1$, und ist g bekannt, so ergibt sich h aus Gleichung (1). Hieraus flieszt der Satz*):

Lehrsatz II. *Alle Curven der Ordnung $n=p+q$, die man durch $n.p-g$ Puncte einer Curve der p-ten und durch $n.q-h$ Puncte einer Curve der q-ten Ordnung legen kann, schneiden die erste Curve noch in g und die zweite Curve noch in h festen Puncten.*

a. Folgerung 1. Aus diesem Satze folgt augenblicklich der neue:

Lehrsatz III. *Damit durch die n^2 Durchschnittspuncte zweier Curven der n-ten Ordnung das System zweier Curven der p-ten und $(n-p)$-ten Ordnung gelegt werden könne, ist es nötig, aber auch hinreichend, dass von diesen Durchschnittspuncten $n.p-g$ der Curve p-ter Ordnung und $n(n-p)-h$ der Curve $(n-p)$-ter Ordnung angehören.*

*) Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, S. 11.

b. Folgerung 2. Hat g seinen kleinsten Wert, so kann man die letzten Sätze auch folgendermaszen faszen:

Lehrsatz IV. *Jede Curve der n-ten Ordnung, die durch $n.p-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Puncte einer Curve der p-ten Ordnung gelegt ist, $p<n$, schneidet diese ausserdem noch in $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ festen Puncten.*

Oder:

Lehrsatz V. *Wenn von den n^2 Durchschnittspuncten zweier Curven der n-ten Ordnung $n.p-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ in einer Curve der p-ten Ordnung liegen, $p<n$, so liegen davon auf derselben noch weitere $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, und die übrigen $n(n-p)$ Puncte liegen auf einer Curve der $(n-p)$-ten Ordnung.*

44. Der Satz von Cayley. Die Sätze der letzten Nummer sind endlich in dem folgenden allgemeinern Satze enthalten:

Lehrsatz VI. *Befinden sich von den Durchschnittspuncten zweier Curven C_n von der n-ten und C_m von der m-ten Ordnung, $m<n$, $m.p-\frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$ auf einer Curve C_p von der Ordnung $p<n$, so liegen auf dieser Curve noch weitere*

$$\tfrac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$$

Puncte, und die übrigen $m(n-p)$ Puncte liegen auf einer Curve der $(n-p)$-ten Ordnung.

Denn beschreibt man durch $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$ der $(n-m)p$ Durchschnittspuncte der Curven C_p und C_n, die sie nicht mit C_m gemein haben, eine Curve C_{n-m} der $(n-m)$-ten Ordnung, so haben wir zwei Orte der n-ten Ordnung, C_n und C_m+C_{n-m}. Die Curve C_p enthält nun

$$mp-\tfrac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)+\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$$
$$=n.p-\tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

Durchschnittspuncte beider Orte. Folglich enthält sie nach Nr. 43*b*. noch weitere $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Durchschnittspuncte, nämlich

$$\tfrac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2).$$

die C_n und C_m gemeinschaftlich haben, und

$$(n-m)p-\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3),$$

die C_n und C_{n-m} gemein sind. Alle Uebrigen liegen dann auf *einer* Curve der $(n-p)$-ten Ordnung.

Aus diesem Satze folgt, dasz durch die

$$m.p-\tfrac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$$

gegebenen, den Curven C_n, C_m, C_p gemeinschaftlichen Puncte noch

$$\tfrac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$$

ebenfalls diesen Curven gemeinschaftliche Puncte bestimmt werden. Diese letzten Puncte sind aber unabhängig von C_n allein durch die Curven C_m und C_p bestimmt, und es gilt daher der Satz:

Lehrsatz VII. *Jede Curve der n-ten Ordnung, die durch*

$$m.p-\tfrac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$$

*Durchschnittspuncte zweier Curven der m-ten und p-ten Ordnung, $m<n$ und $p<n$ vorausgesetzt, beschrieben ist, geht auch durch sämmtliche übrige Durchschnittspuncte dieser beiden Curven**).

45. Anwendungen. Die soeben bewiesenen Sätze sind durch ihren vielfachen Gebrauch in der Theorie der Curven von der allergröszesten Wichtigkeit. Wir begnügen uns hier, einige interessante Beispiele hinzuzufügen.

a. Folgerung 1. Schneidet man eine Curve der n-ten Ordnung durch zwei Transversalen bezüglich in den Puncten:

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots,\ n;$$
$$a',\ b',\ c',\ \ldots\ldots,\ n';$$

und betrachtet das System von n Geraden:

$$aa',\ bb',\ cc',\ \ldots\ldots,\ nn'$$

*) *Cayley*, (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. III., 1843, p. 211).

als einen Ort der n-ten Ordnung, so liegen nach Nr. 43*b*, die übrigen Durchschnittspuncte dieser Geraden mit der gegebnen Curve in einer Curve der $(n-2)$-ten Ordnung. Läszt man die Puncte $a', b', c', \ldots, n'$ respective mit $a, b, c, \ldots, n$ zusammenfallen, so entsteht:

Lehrsatz VIII. *Legt man durch die Puncte, in denen eine Curve n-ter Ordnung von einer Geraden geschnitten wird, Tangenten an die Curve, so schneiden diese dieselbe noch in* $n(n-2)$ *weitern Puncten, die sämmtlich auf einer Curve der* $(n-2)$*-ten Ordnung liegen*).*

b. Folgerung 2. Auf analoge Art beweist man den allgemeinen Satz:

Lehrsatz IX. *Legt man durch die Puncte in denen eine Curve der n-ten Ordnung von einer Curve der n'-ten Ordnung geschnitten wird, die Tangenten der ersten Curve, so schneiden dieselben diese Curve in noch* $n.n'(n-2)$ *Puncten, die alle auf einer Curve der* $n'(n-2)$*-ten Ordnung liegen.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem am Anfang von Nr. 44 bewiesenen Satze, sobald man den Complex der $n.n'$ gemeinschaftlichen Tangenten als einen Ort der $n.n'$-ten Ordnung, und die doppelt gezählte Curve der n'-ten Ordnung als einen Ort der $2n'$-ten Ordnung anfaszt.

c. Folgerung 3. Die Sätze von Pascal und Brianchon.

Lehrsatz X. *Ist eine Curve dritter Ordnung durch die Scheitel eines Sechsecks und durch zwei der drei Puncte, in denen sich je zwei gegenüberstehende Seiten schneiden, beschrieben, so geht sie auch durch den dritten dieser Puncte.*

Denn die erste, dritte und fünfte Seite des Sechsecks bilden einen Ort der dritten Ordnung, einen zweiten Ort der dritten Ordnung liefern die drei übrigen Seiten des Sechsecks. Die neun Durchschnittspuncte dieser beiden Orte sind die sechs Scheitel des Sechsecks und die drei Durchschnittspuncte der

*) Poncelet. *Analyse des transversales.* p. 387.

gegenüberliegenden Seiten. Von diesen liegen nach der Voraussetzung *acht* in der gegebenen Curve, diese enthält also nach Nr. 41. auch den neunten, q. e. d.*).

Liegen die sechs Scheitel in einer Curve der zweiten Ordnung, so liegen nach Nr. 43*b*. die übrigen drei in gerader Linie. Dies gibt das berühmte Theorem von *Pascal*:

Lehrsatz XI. *Die Gegenseiten eines in eine Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechsecks schneiden sich in drei Puncten, die in gerader Linie liegen***).

Aus diesem folgt mittelst des Princips der Dualität der Satz von *Brianchon****):

Lehrsatz XII. *Die drei Geraden, welche die gegenüberliegenden Scheitel eines um eine Curve der zweiten Classe beschriebenen Sechsecks verbinden, schneiden sich in demselben Puncte.*

d. Folgerung 4. Es sei ein Sechseck einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben; 1, 2, 3, 4, 5, 6 seien die Scheitel; *a*, *b*, *c* bezüglich die Durchschnittspuncte der Gegenseiten [12·45], [23·56], [34·61]. Läszt man nun die Puncte 1 und 2 sowie 4 und 5 zusammenfallen, so bilden die Puncte 1, 3, 4, 6, *b*, *c* die Scheitel eines vollständigen Vierseits und *a* ist der Durchschnitt der Tangenten in den Puncten 1 und 4. Das gibt den Satz:

Lehrsatz XIII. *Ist ein vollständiges Vierseit einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben, so schneiden sich die Tangenten der Curve in zwei gegenüberliegenden Scheiteln in einem Puncte der Curve* †).

---

*) *Poncelet, a. a. O.* p. 132.

**) *Pascal, Essais pour les coniques* in den *Oeuvres de Blaise Pascal*. A la Haye. Chez Detune M.DCC.LXXIX. t. 4. p. 1—7. — Man sehe auch: *Weissenborn, die Projection in der Ebene*, Berlin, Weidmannsche Buchhandlung 1862. *Vorrede* S. VIII—XVII.

***) *Brianchon, Journal de l'École polytechnique*, Cah. 13, pag. 301, Paris 1806.

†) *Maclaurin, a. a. O.* p. 237.

Es seien jetzt $a, b, c; a', b', c'$ die Scheitel eines in eine Curve dritter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Vierseits; a, b, c seien in gerader Linie; a', b', c' die Scheitel, welche ihnen bezüglich gegenüberliegen. Nun schneiden sich die Tangenten in den Puncten a und a'; b und b'; c und c' nach dem Obigen in drei Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Curve. Nach Nr. 39*b*. liegen aber, wenn die drei Puncte a, b, c einer Curve dritter Ordnung in gerader Linie liegen, ihre Tangentialpuncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ebenfalls in einer Geraden, und wir haben also den Satz:

> Lehrsatz XIV. ***Ist ein vollständiges Vierseit einer Curve der dritten Ordnung eingeschrieben, so schneiden sich die drei Paare von Tangenten durch die sich gegenüberliegenden Scheitel in drei Puncten der Curve, die in gerader Linie liegen.***

§. 10.

Erzeugung ebener Curven.

46. Doppelverhältnisz von vier Curven eines Büschels. In Nr. 41. verstanden wir unter ***Curvenbüschel der n-ten Ordnung*** das System der unendlich vielen Curven der n-ten Ordnung, die durch dieselben n^2 Puncte gehen. Ein ***Curvenbüschel*** ist also ein geometrisches Gebilde, deszen einzelne Elemente Curven n-ter Ordnung darstellen, die durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ gegebene Puncte und damit auch durch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ andere feste Puncte gehen.

Jede Curve des Büschels ist vollständig individualisiert, sobald ein Punct gegeben ist, durch den sie gehen soll. Nehmen wir an, dieser Punct läge auf einer Geraden, welche durch einen Punct der ***Basis*** geht, und zwar diesem Puncte unendlich nahe, so ist die Curve durch ihre Tangente in dem ***Basispuncte*** gegeben. Legen wir daher durch einen ***Basispunct*** des Büschels eine beliebige Gerade, so gibt es nur eine Curve des Curvenbüschels, welche diese Gerade in dem bestimmten Puncte berührt. Wir construieren jetzt das Stralenbüschel, das durch die sämmtlichen Geraden, welche durch einen ***Basispunct*** gelegt werden können, gebildet wird, und nennen jeden Stral des Stralenbüschels derjenigen Curve des Curvenbüschels ***entsprechend***, die ihn im Basispuncte berührt. Dann entspricht offen-

bar jedem Stral des Stralenbüschels *eine einzige* Curve des Curvenbüschels, und umgekehrt jeder Curve des Curvenbüschels nur *ein* Stral des Stralenbüschels. Folglich bilden Stralenbüschel und Curvenbüschel zwei projectivische geometrische Gebilde.

Betrachten wir zwei Basispuncte und die Stralenbüschel, deren Mittelpuncte sie sind, und nennen diejenigen Stralen der beiden Stralenbüschel *entsprechende* Stralen, die dieselbe Curve des Curvenbüschels in den beiden Basispuncten berühren, so sind die beiden Stralenbüschel offenbar projectivisch, das heiszt, die n^2 Stralenbüschel, deren Mittelpuncte die n^2 Basispuncte bilden, sind sämmtlich unter sich und mit dem Curvenbüschel projectivisch.

Dies vorausgesetzt, verstehen wir unter *Doppelverhältnisz von vier Curven eines Curvenbüschels* das Doppelverhältnisz der vier entsprechenden Stralen eines der n^2 zu dem Curvenbüschel projectivischen Stralenbüschel.

47. Zusammenfallen zweier Basispuncte. Es mögen zwei Basispuncte sich einander unendlich nähern, das heiszt, die Curven des Büschels mögen sich in einem Puncte a berühren. Ist dann A die gemeinschaftliche Tangente aller dieser Curven, so haben alle Curven in a zwei unendlich nahe Puncte mit der Tangente A gemein, so dasz sich also immer eine Curve bestimmen läszt, welche durch einen dritten zu a unendlich nahen Punct von A geht, die also mit A in a eine dreipunctige Berührung hat. Ebenso läszt sich immer eine Curve bestimmen, welche mit einer zweiten beliebigen durch a gelegten Geraden B einen dem Puncte a unendlich nahen Punct gemein hat, die also im Allgemeinen nach Nr. 31. in a mit jeder andern durch a gelegten Geraden zwei zusammenfallende Puncte besitzt, und damit ist der Satz erwiesen:

Lehrsatz I. *Unter allen Curven eines Curvenbüschels, die sich in einem Puncte a berühren, gibt es eine, für welche a ein Wendepunct, und eine, für welche dieser Punct ein Doppelpunct ist.*

48. Der Basispunct als Doppelpunct für alle Curven des Büschels. Es kann sich ereignen, dasz ein Basis-

punct für alle Curven des Curvenbüschels ein Doppelpunct ist; dann gilt dieser Punct nach Nr. 32. für vier der Durchschnittspuncte zweier beliebiger Curven des Büschels, die übrigen Basispuncte sind also in diesem Falle noch n^2-4. Nun ist klar, dasz die Tangentenpaare der einzelnen Curven in dem gemeinschaftlichen Doppelpuncte eine quadratische Involution bilden. Eine solche enthält aber immer zwei Doppelstralen, und es gibt also zwei Curven des Curvenbüschels, für welche a eine Spitze bildet.

Haben alle Curven des Curvenbüschels in dem Doppelpuncte a eine gemeinschaftliche Tangente, so bestimmt jede durch a gelegte Gerade, als zweite Tangente betrachtet, eine Curve des Büschels. In diesem Falle gibt es also nur eine Curve, für welche a eine Spitze bildet.

Haben alle Curven des Büschels im Doppelpunct a dieselben zwei gemeinschaftlichen Tangenten A und A', so läszt sich eine dieser Curven so bestimmen, dasz eine Gerade, die durch a gelegt, aber von A und A' verschieden ist, mit derselben drei gemeinschaftliche Puncte besitzt. In diesem Falle gibt es also nach Nr. 31. eine Curve des Büschels, für welche a ein dreifacher Punct ist. Dies gilt natürlich auch dann noch, wenn die beiden Tangenten A und A' in eine gemeinschaftliche Tangente zusammenfallen, das heiszt, wenn der Punct a für alle Curven des Curvenbüschels eine Spitze bildet.

Dem analog gilt der allgemeine Satz:

Lehrsatz II. *Ist a ein r-facher Punct für alle Curven eines Curvenbüschels, und haben diese daselbst r gemeinschaftliche Tangenten, so gibt es immer eine Curve des Büschels, für welche a ein $(r+1)$-facher Punct ist.*

49. Involution auf einer Transversale durch ein Curvenbüschel erzeugt. Schneidet eine beliebige Transversale die Curven eines Curvenbüschels der n-ten Ordnung, so bilden die Durchschnitte derselben mit jeder Curve der n-ten Ordnung eine Gruppe von n Puncten. Die Gesammtheit aller dieser so gebildeten Gruppen von n Puncten stellt eine Involution des n-ten Grades dar. Denn durch jeden Punct j der Transversale geht *eine einzige* Curve des Büschels, welche diese Transver-

sale in den übrigen $n-1$ Puncten der Gruppe, zu welcher j gehört, schneidet. Jede Gruppe ist also durch einen einzigen ihrer Puncte vollständig bestimmt, und dies ist genau das in Nr. 21. angegebene charakteristische Kennzeichen der Involution *).

Die Involution, die auf diese Weise entsteht, enthält nach Nr. 22. $2(n-1)$ Doppelpuncte, wir haben also den Satz:

Lehrsatz III. ***Unter den Curven eines Büschels der n-ten Ordnung gibt es immer*** $2(n-1)$, ***die eine gegebene Gerade berühren.***

Offenbar sind das Curvenbüschel n-ter Ordnung und die Involution n-ten Grades, die von demselben auf einer beliebigen Transversale bestimmt wird, zwei projectivische geometrische Gebilde, das heiszt, die Doppelverhältnisze von vier Curven des Büschels und von den vier entsprechenden Punctgruppen der Involution, in denen sie eine beliebige Gerade schneiden, sind einander gleich.

Zwei Curvenbüschel heiszen ***projectivisch***, wenn sie bezüglich zu zwei projectivischen Stralenbüscheln projectivisch sind, das heiszt, wenn jeder Curve des einen Büschels ***nur eine*** Curve des andern Büschels entspricht und umgekehrt. Folglich sind offenbar die Doppelverhältnisze von vier Curven des einen und von den vier entsprechenden Curven des zweiten Curvenbüschels einander gleich, und die beiden Involutionen, welche zwei projectivische Curvenbüschel auf derselben oder auf zwei verschiedenen Geraden bestimmen, projectivisch.

50. **Ort der Durchschnittspuncte zweier projectivischer Curvenbüschel.** Wir bestimmen zunächst die Ordnung des Ortes der Durchschnittspuncte der correspondierenden Curven zweier projectivischer Curvenbüschel der n-ten und n'-ten Ordnung. Zu diesem Zwecke schneiden wir beide

*) Diese wichtige Eigenschaft, dasz die Punctgruppen, in der eine Transversale die Curven eines Curvenbüschels schneidet, in Involution sind, ist in dieser Allgemeinheit schon von *Poncelet* (Comptes rendus, 8. Mai 1843. p. 953) ausgesprochen. *Sturm* hat diesen Satz für die Kegelschnitte bewiesen: *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Annales de *Gergonne*, t. 17, Nismes 1826—27, p. 180).

Büschel durch eine Transversale. Hierdurch entstehen zwei projectivische Involutionen vom n-ten und n'-ten Grade, die nach Nr. 24*b*. $n+n'$ gemeinschaftliche Puncte haben. Auf der gegebenen Transversale liegen also $n+n'$ Puncte, durch welche je zwei entsprechende Curven der beiden Curvenbüschel hindurch gehen, das heiszt $n+n'$ Puncte des gesuchten Ortes. Dieser Ort ist demnach eine Curve $C_{n+n'}$ der $(n+n')$-ten Ordnung*). Sie geht durch sämmtliche Basispuncte der beiden Curvenbüschel, da ein jeder dieser Puncte auf allen Curven des einen Büschels und auf je einer Curve des andern Büschels liegt**).

a. Zerlegung des Ortes in Curven niederer Ordnung. Die resultierende Curve der $(n+n')$-ten Ordnung kann oftmals in Curven von niederer Ordnung zerlegt werden. So sind z. B., wenn die einander entsprechenden Curven der beiden Büschel sich beständig auf einer Curve der r-ten Ordnung, $r < n+n'$, schneiden, die übrigen Durchschnittspuncte alle auf einer zweiten Curve der $(n+n'-r)$-ten Ordnung gelegen, und diese und die obige Curve der r-ten Ordnung bilden zusammen den vollständigen, durch die beiden Curvenbüschel erzeugten Ort der $(n+n')$-ten Ordnung.

b. Anderer Fall der Zerlegung. Diese Zerlegung greift auch dann Platz, wenn die beiden projectivischen Curvenbüschel, die wir jetzt von derselben Ordnung n voraussetzen, eine gemeinschaftliche Curve haben, die sich selbst zugeordnet ist. Dann kann man jeden Punct dieser Curve als gemeinschaftlichen Punct zweier entsprechender Curven auffaszen, und der Ort der Durchschnittspuncte von je zwei der übrigen entsprechenden Curven der beiden Büschel ist in diesem Falle eine Curve der n-ten Ordnung.

Diese Eigenschaft kann man auch auf folgende Art aussprechen:

*) Ueber diese Methode, die Ordnung eines geometrischen Ortes zu bestimmen, sehe man *Poncelet*, *Analyse des transversales*, p. 29.

**) *Chasles*, *Construction de la courbe du 3me ordre etc.* (Comptes rendus, 30. Mai 1853). — *Sur les courbes du 4me et du 5me ordre etc.* (Comptes rendus, 16. août 1853). — *Jonquières*, *Essais sur la génération des courbes etc.* Paris, 1858, p. 6.

Lehrsatz IV. ***Ist eine Curve H durch die gemeinschaftlichen Puncte zweier Curven U und V und gleichzeitig durch die gemeinschaftlichen Puncte zweier anderer Curven U' und V' beschrieben, so liegen die Durchschnittspuncte der Curven U und U', sowie die der Curven V und V' sämmtlich auf einer und derselben zweiten Curve K.***

Natürlich sind alle diese Curven von derselben n-ten Ordnung angenommen.

51. Einflusz zusammenfallender Durchschnittspuncte. Schneiden wir wiederum, wie soeben, zwei gegebene projectivische Curvenbüschel durch eine Transversale R, so erhalten wir zwei projectivische Involutionen, deren $n+n'$ gemeinschaftliche Puncte die Durchschnittspuncte der Transversale R mit der durch die Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven erzeugten Curve $C_{n+n'}$ sind. Es liege nun auf R ein Punct o, in welchem r Durchschnittspuncte der sämmtlichen Curven des ersten Büschels und r' dieser Durchschnittspuncte für sämmtliche Curven des zweiten Büschels mit der Geraden R zusammenfallen, gleichzeitig habe eine Curve C_n des ersten Büschels in o $r+s$ Puncte mit R gemein, und die ihr entsprechende Curve $C_{n'}$ des zweiten Büschels und R ebenfalls $r'+s'$ mit o zusammenfallende Durchschnittspuncte, dann fallen nach der in Nr. 24*c*. und *d*., gegebenen Auseinandersetzung $r+r'+s$ oder $r+r'+s'$ Durchschnittspuncte der Transversale R und der Curve $C_{n+n'}$ mit o zusammen, je nachdem $s \lessgtr s'$ ist.

Aus diesem allgemeinen Satze folgen eine bedeutende Zahl weiterer Sätze. Wir beschränken uns darauf, diejenigen hier auszusprechen, deren wir später benötigt sein werden.

a. Folgerung 1. Es sei o ein Basispunct des ersten Büschels, $C_{n'}$ die Curve des zweiten Büschels, die durch o geht, C_n die entsprechende Curve des ersten Büschels und R die Tangente der Curve C_n im Puncte o. Dann folgt aus dem Obigen ($r=1$, $r'=0$, $s=1$, $s'=1$), dasz R auch Tangente von $C_{n+n'}$ in o ist.

b. Folgerung 2. Die Curven des ersten Büschels gehen

durch o und haben daselbst eine gemeinschaftliche Tangente, es ist also unter ihnen nach Nr. 47. eine C_n, für die o ein Doppelpunct ist. Geht die entsprechende Curve $C_{n'}$ des zweiten Büschels ebenfalls durch o, so schneidet nach dem allgemeinen Satze *jede beliebige* durch o gezogene Gerade ($r=1$, $r'=0$, $s=1$, $s'=1$) die Curve $C_{n+n'}$ in zwei mit o zusammenfallenden Puncten, o ist also für $C_{n+n'}$ ein Doppelpunct.

c. Folgerung 3. Hat unter den vorigen Voraussetzungen $C_{n'}$ in o einen vielfachen Punct, so folgt für eine der beiden Tangenten in o von C_n aus dem allgemeinen Satze ($r=1$, $r'=0$, $s=2$, $s'>1$), dasz dieselbe mit $C_{n+n'}$ drei Puncte, die mit o zusammenfallen, gemein hat. $C_{n+n'}$ hat also mit C_n nicht nur den Doppelpunct o gemein, sondern auch die beiden Tangenten des Doppelpunctes.

d. Folgerung 4. Unter der Voraussetzung in *b.* sei R in o eine gemeinschaftliche Tangente der Curven des ersten Büschels und auch eine der Tangenten an die beiden Zweige von C_n, dann ist sie auch ($r=2$, $r'=0$, $s=1$, $s'=1$) Tangente eines der beiden Zweige von $C_{n+n'}$.

e. Folgerung 5. Berührt auszerdem die zweite Tangente von C_n in o dort auch die entsprechende $C_{n'}$, so folgt, dasz diese Gerade ($r=1$, $r'=0$, $s=2$, $s'=2$) die Tangente des zweiten Zweiges der $C_{n+n'}$ ist. Folglich hat $C_{n+n'}$, wenn für C_n beide Tangenten durch o in die Gerade R zusammenfallen, die als gemeinschaftliche Tangente aller Curven des ersten Büschels vorausgesetzt war, und diese im Puncte o auch $C_{n'}$ berührt, in o eine Spitze, und R ist die Rückkehrtangente.

f. Folgerung 6. Es gehen die entsprechenden Curven C_n und $C_{n'}$ dieselbe Anzahl t-mal durch den Punct o. Eine beliebige Gerade R durch o gezogen hat dann ($r=r'=0$, $s=s'=t$) in o mit $C_{n+n'}$ t Puncte gemein, folglich ist o auch ein t-facher Punct von $C_{n+n'}$.

g. Folgerung 7. Geht C_n t-mal, $C_{n'}$ aber t'-mal durch o, $t'>t$, so ist der Punct o natürlich immer noch ein t-facher Punct von $C_{n+n'}$. Betrachten wir nun eine der Tangenten von C_n in o, so ergibt das allgemeine Theorem ($r=r'=0$, $s=t+1$,

$i' > i$), dasz diese Tangente $i+1$ Puncte mit $C_{n+n'}$ in o gemein hat, dasz also die Tangenten an die i Zweige von C_n auch die i Zweige von $C_{n+n'}$ in o berühren.

Ebenso würde man auch das in der folgenden Nummer Gesagte beweisen können.

52. Einflusz gemeinschaftlicher Basispuncte. Haben die Basen der beiden Curvenbüschel einen Punct a gemein, und ist derselbe für die Curven des ersten Büschels ein r-facher, für die des zweiten Büschels ein r'-facher Punct, so hat jede Curve des ersten Büschels in a eine Gruppe von r Tangenten. Die entsprechenden Gruppen für die einzelnen Curven dieses Büschels bilden eine Involution r-ten Grades, ebenso bilden natürlich die Tangenten an die Curven des zweiten Büschels in a eine Involution des r'-ten Grades. Diese beiden Involutionen haben nun nach Nr. 24 *b*. $r+r'$ gemeinschaftliche Stralen, deren jeder, da er in a zwei entsprechende Curven der beiden Büschel berührt, auch in demselben Puncte die Curve $C_{n+n'}$ berührt. Diese Curve hat daher $r+r'$ Zweige, die sämmtlich durch a gehen, und die Tangenten dieser Zweige bilden die gemeinschaftlichen Stralen der beiden Involutionen.

a. Besonderer Fall. Hieraus folgt, dasz, wenn alle Curven eines Büschels in a eine gemeinschaftliche Tangente haben, diese auch Tangente von $C_{n+n'}$ ist. Sind nun alle r Tangenten in a für die Curven des ersten Büschels gemeinschaftlich, also auch Tangenten an die Curve $C_{n+n'}$, so sind offenbar nach Nr. 48. die r' übrigen Tangenten dieser letzteren Curve die r' Tangenten der Curve $C_{n'}$ des zweiten Büschels, welche der Curve C_n des ersten Büschels entspricht, für welche a ein $(r+1)$-facher Punct ist.

53. Aufgabe eine Curve von bestimmter Ordnung zu construieren. Das wichtige Theorem in Nr. 50. führt ganz natürlich auf die Aufgabe:

Es sind soviel Puncte gegeben, als nötig sind, damit durch sie nur eine einzige Curve der $(n+n')$-ten Ordnung gelegt werden kann; man soll zwei projectivische Curvenbüschel von

der n-ten und n'-ten Ordnung construieren, welche durch die Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven die gesuchte Curve erzeugen.

Ist diese Aufgabe gelöst, so folgt unmittelbar:

Lehrsatz V. ***Jede Curve einer bestimmten Ordnung $n+n'$ lässt sich durch die Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven zweier projectivischer Curvenbüschel der n-ten und n'-ten Ordnung erzeugen.***

Die Lösung der gestellten Fundamental-Aufgabe hängt von einigen Lehrsätzen ab, die *Chasles* und *Jonquières* aufgestellt haben, zu deren Darlegung wir jetzt übergehen. Da für die Curven der zweiten Ordnung, wie weiter unten in Nr. 59. gezeigt werden soll, der Satz in Nr. 50. zur Lösung hinreicht, so brauchen wir die nachfolgenden Sätze nur für Curven, deren Ordnungszahl $n+n'$ gröszer als 2 ist, zu beweisen. Es ist also für das Folgende anzunehmen erlaubt, $n+n'$ sei nicht kleiner als 3.

54. **Der erste Satz von Chasles. I. Fall.** Auf einer Curve der $(n+n')$-ten Ordnung $C_{n+n'}$ nehmen wir n^2 Puncte an und betrachten sie als Basis eines Curvenbüschels n-ter Ordnung. Wir setzen dabei voraus, es sei $n > n'$. Sind nun C_n und C'_n zwei Curven dieses Büschels, so liegen nach Nr. 44. $n.n'$ der Durchschnittspuncte der Curven $C_{n+n'}$ und C_n auf einer Curve $C_{n'}$ der n'-ten Ordnung, da die übrigen n^2 Durchschnittspuncte auf C'_n liegen. Die Curve $C_{n'}$ ist nun bestimmt, wenn $n \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}(n'+3)$, also $n.n' \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}n'(n'+3)$ ist, $n > n'$ vorausgesetzt*). Analog gilt der Satz: von den $n(n+n')$ Durhschnittspuncten der Curven $C_{n+n'}$ und C'_n liegen n^2 auf C_n; die andern $n.n'$ liegen also auf einer Curve $C'_{n'}$ von der n'-ten Ordnung.

Die beiden Orte der $(n+n')$-ten Ordnung, $C_n + C'_{n'}$ und $C'_n + C_{n'}$, schneiden sich in $(n+n')^2$ Puncten. Von diesen liegen

$$n^2 + 2n.n' = n(2n'+n)$$

*) Für $n=2$, $n'=1$ ist $n=\frac{1}{2}(n'+3)$, in allen andern Fällen $n > \frac{1}{2}(n'+3)$.

auf $C_{n+n'}$, da nun

$$n(n+2n') \overline{\gtrsim} \tfrac{1}{2}(n+n')(n+n'+3)-1\ ^{*)}$$

ist, so liegen auch nach Nr. 41. die n'^2 andern Durchschnittspuncte der beiden Orte, das heiszt, die n'^2 Durchschnittspuncte von $C_{n'}$ und $C'_{n'}$ auf $C_{n+n'}$ und bilden die Basis eines Büschels von der n'-ten Ordnung. Wir haben somit auf $C_{n+n'}$ zwei Systeme von Puncten. Das eine von n^2 Puncten bildet die Basis eines Büschels der n-ten Ordnung, das andere von n'^2 Puncten die Basis eines zweiten Curvenbüschels der Ordnung n'. Jede Curve C_n des ersten Büschel schneidet $C_{n+n'}$ in weitern $n.n'$ Puncten, welche eine Curve $C_{n'}$ des zweiten Büschels bestimmen; und umgekehrt, die zweite Curve bestimmt die erste. Die beiden so bestimmten Curvenbüschel sind daher projectivisch, und die Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven liegen somit alle auf der Curve $C_{n+n'}$.

a. Der erste Satz von Chasles. II. Fall. Wir nehmen jetzt zweitens an, es sei $n \overline{\lesssim} n'$. Jede durch die n^2 Puncte von $C_{n+n'}$ gelegte Curve C_n schneidet dann diese Curve in noch weitern $n.n'$ Puncten, die aber in diesem Falle nicht von einander unabhängig sind, da nach Nr. 41. und Nr. 42. jede Curve, welche durch $n.n'-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ derselben beschrieben ist, auch alle andern enthält. Nehmen wir also beliebig andere

$$\tfrac{1}{2}n'(n'+3)-\{n.n'-\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\}=\tfrac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2),$$

Puncte an, so liegen alle diese

$$\tfrac{1}{2}\{n'(n'+3)+(n-1)(n-2)\}$$

Puncte auf einer Curve $C_{n'}$ der n'-ten Ordnung. Alle diese weitern Puncte werden gleichzeitig auch auf der Curve $C_{n+n'}$ liegen.

---

*) Für $n=2$, $n'=1$ ist

$$n(n+2n')=\tfrac{1}{2}(n+n')(n+n'+3)-1,$$

für $n \overline{\gtrsim} 3$ ist aber:

$$n(n+2n')=\tfrac{1}{2}\{(n+n')^2+n(n+n')+n'(n-n')\}>\tfrac{1}{2}(n+n')(n+n'+3)-1.$$

Dem analog ergibt sich: Eine andere Curve C'_n des Büschels n-ter Ordnung schneidet $C_{n+n'}$ auszer in den n^2 Basispuncten in $n.n'$ Puncten, und diese bestimmen zusammen mit den weiter hinzugefügten

$$\tfrac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2)$$

Puncten eine Curve $C'_{n'}$ der n'-ten Ordnung.

Die beiden Orte der $(n+n')$-ten Ordnung, $C_n+C'_{n'}$ und $C'_n+C_{n'}$, haben nun $(n+n')^2$ Puncte gemein. Von diesen liegen

$$n^2+2n.n'+\tfrac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2)$$

auf $C_{n+n'}$. Diese Zahl ist aber gleich

$$\tfrac{1}{2}(n+n')(n+n'+3)-1+(n-1)(n-2),$$

also

$$\geqq \tfrac{1}{2}(n+n')(n+n'+3)-1,$$

und es liegen folglich nach Nr. 41. die noch übrigen

$$n'-\tfrac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2)$$

Durchschnittspuncte von $C_{n'}$ und $C'_{n'}$ auch alle auf $C_{n+n'}$ und bilden daher mit den weiteren gegebenen Puncten die Basis eines Curvenbüschels der n'-ten Ordnung. Wir haben also auch in diesem Falle auf der Curve $C_{n+n'}$ zwei System von Puncten, welche die Basen von zwei Curvenbüscheln bezüglich der n ten und n'-ten Ordnung bilden. Diese beiden Büschel sind projectivisch, da jede Curve des einen nur eine Curve des andern bestimmt und umgekehrt. Auszerdem schneiden sich die einander entsprechenden Curven beständig so, dasz die Durchschnittspuncte auf der gegeben Curve $C_{n+n'}$ liegen*).

b. Ergebnisz aus dem Vorhergehenden. Dieser Satz zeigt, wie man, wenn auf einer gegebenen Curve der Ordnung $n+n'$ die Basispuncte eines Büschels der n-ten Ordnung bestimmt sind, auch die Basispuncte des ihm projectivischen

*) *Chasles, Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres.* (Comptes rendus, 28. décembre 1857).

Büschels der Ordnung n' festlegen kann, so dasz durch die Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven beider Büschel die gegebene Curve erzeugt wird.

Es bleibt uns noch übrig, zu untersuchen, in welcher Weise auf einer gegebenen Curve der $(n+n')$-ten Ordnung die n^2 Basispuncte des Büschels von der n-ten Ordnung bestimmt werden können.

55. Der zweite Satz von Chasles. Wir bemerken zuerst, dasz aus dem Satze von *Cayley* in Nr. 44. folgt:

Lehrsatz VI. *Enthält eine Curve $(n+n')$-ter Ordnung*

$$n^2-\tfrac{1}{2}(n-n'-1)(n-n'-2)$$

Durchschnittspuncte zweier Curven der n-ten Ordnung, so enthält sie auch die übrigen.

oder auch:

Lehrsatz VII. *Liegen von den Basispuncten eines Büschels n-ter Ordnung*

$$n^2-\tfrac{1}{2}(n-n'-1)(n-n'-2)$$

auf einer Curve der $(n+n')$-ten Ordnung, so liegen alle diese Puncte auf dieser Curve.

Dieser Satz setzt offenbar voraus, es sei

$$n-n'-2>0,$$
$$n>n'+2.$$

Es sei daher jetzt $n>n'+2$. Sollen wir nun auf einer gegebenen Curve der $(n+n')$-ten Ordnung die n^2 Basispuncte eines Büschels der n-ten Ordnung bestimmen, so ist es hinreichend, dasz von diesen n^2 Puncten

$$n^2-\tfrac{1}{2}(n-n'-1)(n-n'-2),$$

auf dieser Curve bestimmt werden, damit sie alle auf ihr gelegen sind. Es musz also auch eben so vielen Bedingungen genügt werden.

Abstrahieren wir für den Augenblick von der gegebenen

Curve. Die n^2 Basispuncte sind ganz im Allgemeinen durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ von ihnen bestimmt, und da nun zur Bestimmung eines Punctes zwei Bedingungen nötig sind, so brauchen wir zur Festlegung aller Puncte der Basis des Büschels $n(n+3)-2$ Bedingungen. Sollen die Basispuncte aber auf der gegebenen Curve liegen, so haben sie nur

$$n^2-\tfrac{1}{2}(n-n'-1)(n-n'-2)$$

Bedingungen zu genügen, wir behalten daher

$$n(n+3)-2-n^2+\tfrac{1}{2}(n-n'-1)(n-n'-2)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(n-n')^2+3(n+n')-2\}$$

Bedingungen übrig, und soviele Elemente können wir also nach Belieben verteilen. Da nun ein Punct, der auf einer Curve liegen musz, durch nur noch eine weitere Bedingung gegeben ist, so können wir auf der gegebenen Curve $\frac{1}{2}\{(n-n')^2+3(n+n')-2$ Puncte beliebig annehmen, um die Basis des Büschels n-ter Ordnung zu bestimmen.

In dem andern Falle, wenn $n \overline{\overline{<}} n'+2$ ist, müszen, damit die n^2 Basispuncte auf der Curve liegen, n^2 Bedingungen erfüllt sein. Schlieszen wir nun weiter wie Oben, so erhalten wir

$$n(n+3)-2-n^2=3n-2$$

freie Bedingungen, und es gilt also der Satz:

Lehrsatz VIII. *Soll man auf einer Curve der $(n+n')$-ten Ordnung n^2 Puncte so bestimmen, dasz sie die Basispuncte eines Curvenbüschels der n-ten Ordnung sind, so kann man von ihnen $\frac{1}{2}\{(n-n')^2+3(n+n')-2\}$, oder $3n-2$ Puncte beliebig auf derselben verteilen, jenachdem $n>n'+2$ oder $n \overline{\overline{<}} n'+2$ ist**).

Aus den beiden in Nr. 54. und in dieser Nummer bewiesenen Sätzen folgt nun, dasz jede Curve der m-ten Ordnung auf eine unbegrenzte Zahl verschiedener Arten durch zwei projecti-

---

*) Chasles, *Détermination du nombre de points, qu'on peu prendre etc.* (Comptes rendus, 21. Septembre 1857).

vische Curvenbüschel erzeugt werden kann, deren Ordnungen n und n' zur Summe $n + n' = m$ geben.

56. **Der erste Satz von Jonquières.** Wir haben so die Zahl der Puncte gefunden, die wir auf einer gegebenen Curve m-ter Ordnung beliebig annehmen können, um auf ihr die Basis eines Curvenbüschels der n-ten Ordnung, $n < m$, zu construieren, und müszen jetzt auch die Zahl der Puncte bestimmen, welche nicht willkürlich angenommen, sondern die sämmtlich individualisiert sein müszen, um die Basispuncte der beiden erzeugenden Büschel vollständig festzulegen. Nun können, wenn m in zwei Teile n und n' zerlegt wird, diese entweder gleich oder ungleich sein. Zuerst nehmen wir an, sie seien ungleich, und n die gröszere Zahl.

Ist $n > n'+2$, so ist die Zahl der willkürlichen Puncte gleich $\frac{1}{2}\{(n+n')^2+3(n+n')-2\}$, die Basen der beiden Büschel sind aber bezüglich durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ und $\frac{1}{2}n'(n+3)-1$ Puncte bestimmt, es ist folglich die Zahl der noch zu bestimmenden gleich

$$\frac{1}{2}\{n(n+3)+n'(n'+3)\}-2-\frac{1}{2}\{(n-n')^2+3(n+n')-2\} \\ = n.n'-1.$$

Ist $n = n'+2$ oder $n = n'+1$, so ist die Anzahl der willkürlichen Puncte gleich $3n-2$, es bleiben also noch zu bestimmen:

$$\frac{1}{2}\{n(n+3)+n'(n'+3)\}-2+(3n-2) = n.n'-1.$$

Ist $n = n'$, so ist die Zahl der willkürlichen Puncte, um die Basis des ersten Büschels zu bilden, gleich $3n-2$. Ist aber diese bestimmt, so kann man noch einen weitern Punct willkürlich annehmen, um die Basis des zweiten Büschels zu bestimmen. Denn die in Nr. 54. gefundene Zahl der weitern willkürlichen Puncte $\frac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2)$ wird für $n = n'$ genau gleich 1. Die Zahl der noch zu bestimmenden Puncte ist daher:

$$\frac{1}{2}\{n(n+3)+n'(n'+3)\}-2-3(n-2)-1 = n.n'-1.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man von derjenigen der beiden Zahlen n und n' ausgeht, die die kleinere

ist. Es sei also jetzt z. B. $n < n'$, so können, um die Basis des Büschels der Ordnung n zu bestimmen, $3n-2$ Puncte willkürlich angenommen werden. Ist diese Basis bestimmt, so kann man noch $\frac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2)$ beliebige Puncte für die Basis des zweiten Büschels annehmen. Es bleiben also im Ganzen für beide Basen noch

$$\tfrac{1}{2}\{n(n+3)+n'(n'+3)\}-2-(3n-2)-\tfrac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2) = n.n'-1$$

Puncte zu bestimmen übrig.

Aus Alle dem folgt der Satz:

Lehrsatz IX. *Von den Basispuncten zweier Büschel von Curven der n-ten und n'-ten Ordnung, durch welche eine Curve der $(n+n')$-ten Ordnung erzeugt werden soll, sind immer $n.n'-1$, welche nicht willkürlich gewählt werden können, sondern durch die Elemente, welche die Curve individualisieren, bestimmt werden müssen.*

57. Der zweite Satz von Jonquières. Es seien

$$\tfrac{1}{2}(n+n')(n+n'+3)$$

Puncte gegeben, durch die man eine Curve der $(n+n')$-ten Ordnung beschreiben soll. Zu diesem Zweck müszen wir zwei projectivische Curvenbüschel von der n-ten und n'-ten Ordnung bestimmen, welche in den Durchschnittspuncten der correspondierenden Curven die gesuchte Curve der $(n+n')$-ten Ordnung erzeugen.

Von den $\frac{1}{2}\{n(n+3)+n'(n'+3)\}-2$ Puncten, welche die Basen der beiden Büschel völlig bestimmen, sind nur $n.n'-1$ Puncte, die nicht beliebig sind. Von den gegebenen Puncten können also zu Basispuncten $\frac{1}{2}\{n(n+3)+n'(n'+3)\}-2-(n.n'-1)$ genommen werden, und $2n.n'+1$ dieser Puncte fallen dann nicht mit den Basispuncten zusammen. Damit die gesuchte Curve auch durch sie hindurchgeht, müszen die Curven des ersten Büschels, welche durch diese $2n.n'+1$ Puncte gelegt werden können, den Curven des zweiten Büschels, welche durch dieselben Puncte gelegt werden können, projectivisch entsprechen. Da nun, um die Projectivität zweier Gebilde herzu-

stellen, nach Belieben drei Elementepaare als entsprechende angenommen werden dürfen, die dann für jedes beliebige vierte Element des einen Gebildes mittelst der Gleichheit der Doppelverhältnisze nach Nr. 8. das entsprechende Element des zweiten Gebildes bestimmen, so ergeben sich aus der Projectivität dieser $2n.n'-1$ sich entsprechender Curvenpaare $(2n.n'+1)-3 = 2(n.n-1)$ Bedingungen, das heiszt die Zahl, welche genau hinreicht, um die $n.n'-1$ unbekannten Puncte zu bestimmen*).

58. Verschiedene Lösung der Aufgabe. Das in Nr. 53. aufgestellte Problem läszt verschiedene Lösungen zu, nicht allein in Bezug auf die mehrfache Teilung der Ordnungszahl der Curve in zwei andere Zahlen n und n', sondern auch in Bezug auf die verschiedenen Arten, auf welche man die willkürlichen Puncte auf den Basen der erzeugenden Curvenbüschel verteilt, und damit natürlich auch die nicht willkürlichen Puncte.

Aus dem in Nr. 56. Ausgesprochenen folgt nun noch:

Lehrsatz X. *Von den Basispuncten zweier Curvenbüschel der n-ten und n'-ten Ordnung, welche eine Curve der $(n+n')$-ten Ordnung erzeugen sollen, $n \gtrless n'$, können alle willkürlichen Puncte der Basis des Curvenbüschels von höherer Ordnung zugeteilt werden, ist aber $n=n'$, so können alle willkürlichen Puncte weniger einem als einer der beiden Basen angehörig betrachtet werden***).

§. 11.

Construction der Curven zweiter Ordnung.

59. Construction mittelst zweier projectivischer Stralenbüschel. Setzt man in dem Satze der Nr. 50. $n=n' = 1$, so entsteht:

Lehrsatz I. *Der Ort der Durchschnittspuncte zweier entsprechender Stralen zweier projectivischer Stralenbü-*

*) *Jonquières, Essai sur la génération des courbes etc.* p. 13—14.

**) *Chasles, Détermination du nombre de points etc.* w. O.

schel mit den Centren o und o', ist eine Curve der zweiten Ordnung, die durch o und o' geht.

Umgekehrt entsteht:

Lehrsatz II. ***Sind o und o' zwei beliebige feste Puncte einer Curve zweiter Ordnung, m ein beweglicher Punct derselben Curve, so erzeugen bei der Bewegung desselben die Stralen om und o'm zwei projectivische Stralenbüschel.***

Liegt m unendlich nahe bei o, so wird der Stral om zur Tangente der Curve in o, es ist also die Tangente in o der Stral des ersten Stralenbüschels, der dem Strale oo' des zweiten Stralenbüschels entspricht.

Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar die Construction der Curve zweiter Ordnung, von der fünf Puncte a, b, c, o, o' gegeben sind. Wir nehmen o und o' als Mittelpuncte zweier projectivischer Stralenbüschel und die Stralenpaare $[oa, o'a]$, $[ob, o'b]$, $[oc, o'c]$ als einander entsprechende an. Jeder andere Punct der Curve ist nach Nr. 3. der Durchschnittspunct zweier entsprechender Stralen der beiden Stralenbüschel. Diese Construction fällt mit derjenigen zusammen, welche aus dem Satze von *Pascal* (Nr. 45 c.) flieszt. Sie bleibt auch in dem Falle dieselbe, dasz zwei Puncte von den gegebenen einander auf einer gegebenen Geraden unendlich nahe liegen, das heiszt, in dem Falle, wo die gesuchte Curve durch vier Puncte gehen soll und in einem derselben eine gegebene Gerade berühren, u. s. w.

Entspricht in den beiden projectivischen Stralenbüscheln, deren Centren o und o' sind, der Stral oo' sich selbst, so ist jeder Punct desselben zwei entsprechenden aufeinanderfallenden Stralen gemein, er bildet also selbst einen Teil des Ortes zweiter Ordnung, der durch die beiden Stralenbüschel erzeugt wird. Dieser Ort besteht also nach Nr. 50 b. aus dem Stral oo' und einer anderen Geraden, welche alle andern Durchschnittspuncte der entsprechenden Stralen enthalten wird.

60. Construction mittelst zweier projectivischer Punctreihen. Eine weitere Aufgabe ist die folgende: Es sind zwei projectivische Punctreihen A und A' gegeben; von welcher Classe ist die Einhüllende der Geraden, welche zwei

entsprechende Puncte derselben verbindet? Wir betrachten die beiden Stralenbüschel, welche entstehen, wenn wir einen beliebigen Punct o mit allen entsprechenden Puncten von A und A' verbinden. Die beiden Stralenbüschel sind den Punctreihen projectivisch, also auch unter sich selbst projectivisch. Jede Gerade nun, welche zwei entsprechende Puncte der Punctreihen A und A' verbindet und durch o geht, ist ein beiden Stralenbüscheln *gemeinschaftlicher Stral*, das heiszt ein Stral, der mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Nun haben aber nach Nr. 10. zwei concentrische projectivische Stralenbüschel zwei gemeinschaftliche Stralen, es gehen daher durch o zwei Gerade, deren jede Tangente der Einhüllenden ist, deren Classe wir bestimmen sollen. Folglich ist diese Einhüllende von der zweiten Classe. Den gemeinschaftlichen Punct der Geraden A und A' nennen wir p oder q', jenachdem er als der ersten oder zweiten Punctreihe angehörig betrachtet wird; p' und q seien die beiden den Puncten p und q' entsprechenden Puncte. Die Geraden pp', das heiszt A, und qq', das heiszt A', werden Tangenten der Curve zweiter Classe sein, folglich berührt diese die gegebenen Geraden.

Umgekehrt werden zwei feste Tangenten A und A' einer Curve zweiter Classe von einer beweglichen Tangente M dieser Curve in zwei projectivischen Punctreihen geschnitten. Ein beliebiges Punctpaar derselben sei bezüglich durch a und a' bezeichnet. Will M eben mit A zusammenfallen, so ist a der Punct, in welchem A die Curve berührt; A berührt also die Curve in dem Puncte q, welcher dem Puncte q' von A' entspricht, in dem sich die beiden Geraden A und A' schneiden.

Aus dem Vorhergehenden ist die Construction der Curven zweiter Classe, die fünf gegebene Gerade berühren soll, mittelst ihrer Tangenten augenblicklich klar. Zwei dieser Geraden werden von den drei andern in je drei Punctpaaren geschnitten, die als einander entsprechende betrachtet, zwei projectivische Punctreihen erzeugen. Jede andere Tangente der gesuchten Curve ist durch zwei entsprechende Puncte dieser Punctreihen bestimmt.

Entspricht in den beiden geraden projectivischen Punctreihen A und A' der Durchschnittspunct der beiden Geraden sich selbst, so verbindet jede durch ihn gezogene Gerade zwei

entsprechende, und zwar zusammenfallende Puncte. Dieser Punct ist daher selbst ein Teil der Einhüllenden zweiter Classe, die durch beide Punctreihen erzeugt wird. Diese selbst wird daher aus dem gegebenen Durchschnittspunct und einem zweiten Puncte zusammengesetzt, in welchem sich dann nach Nr. 3. alle Geraden, welche zwei entsprechende Puncte der Punctreihe verbinden, schneiden müszen.

61. Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe sind identisch. Durch einen Punct einer Curve zweiter Classe kann nach Nr. 30. keine Gerade gelegt werden, welche die Curve noch in einem andern Puncte berührt. Eine Gerade, welche also eine Curve zweiter Classe berührt, kann sie in keinem weiteren Puncte treffen, folglich ist eine Curve zweiter Classe auch eine Curve zweiter Ordnung.

Ebenso beweist man, dasz eine Curve der zweiten Ordnung auch von der zweiten Classe ist. Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe sind also identisch, aber nur so lange wir *einfache Curven* betrachten. Denn ein System von zwei Geraden ist wol eine Curve der zweiten Ordnung, aber nicht der zweiten Classe, und ebenso ist das System zweier Puncte wol eine Einhüllende zweiter Classe, aber keine Curve zweiter Ordnung.

Die Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe bezeichnet man gewöhnlich mit dem Namen der *Kegelschnitte*.

62. Aufgaben. Aus dem Satze in Nr. 59. folgt noch, dasz, wenn a, b, c, d vier gegebene Puncte eines Kegelschnittes sind, und m ein veränderlicher Punct derselben Curve, das Doppelverhältnisz der vier Stralen $m(a, b, c, d)$ constant ist, das heiszt gleich dem der vier Geraden $a(a, b, c, d)$, worin aa die Gerade bezeichnet, welche den Kegelschnitt in a berührt.

Umgekehrt ist der Ort eines Punctes m, für welchen das Doppelverhältnisz der Geraden $m(a, b, c, d)$ constant $= \lambda$ ist, unter a, b, c, d gegebene Puncte verstanden, ein Kegelschnitt der durch a, b, c, d geht. Die Construction desselben ist sehr einfach. Ist aa eine Gerade die durch a geht, und das Doppelverhältnisz der Stralen $a(a, b, c, d)$ dem gegebenen Werte λ gleich gemacht, so ist der Kegelschnitt dadurch gegeben, dasz

er durch a, b, c, d gehen musz und in a die Gerade aa berühren.

Der geometrische Ort, den wir eben betrachteten, führt auf die Lösung des folgenden Problems:

Es sind fünf Gerade $o'(a', b', c', d' e')$ gegeben, die sich in einem Puncte o' schneiden und auszerdem fünf andere Puncte a, b, c, d, e; man soll einen Punct o bestimmen, dasz das Stralenbüschel $o(a, b, c, d, e)$ dem Stralenbüschel $o'(a', b', c', d', e')$ projectivisch sei.

Wir denken uns den Kegelschnitt beschrieben, der der Ort eines Punctes m ist, für welchen die Doppelverhältnisze der beiden Stralenbüschel $m(a, b, c, d)$ und $o'(a', b', c', d')$ einander gleich werden. Ebenso beschreiben wir den Kegelschnitt, welcher der Ort eines Punctes n ist, für welchen die Doppelverhältnisze der beiden Stralenbüschel $n(a, b, c, e)$ und $o'(a', b', c', e')$ einander gleich werden. Der erste Kegelschnitt geht durch die Puncte a, b, c, d, der zweite ebenso durch die Puncte a, b, c, e, beide sind also vollständig bestimmt.

Da nun der gesuchte Punct sowol die Eigenschaft des Punctes m, als die des Punctes n haben soll, so musz er offenbar auf beiden Kegelschnitten liegen. Diese haben aber drei gemeinschaftliche Puncte a, b, c, folglich ist ihr vierter Durchschnittspunct der gesuchte. Derselbe läszt sich, wie wir nachher zeigen werden, ohne die beiden Kegelschnitte wirklich zu verzeichnen, construieren.

63. Curvenbüschel zweiter Ordnung. Die Kegelschnitte, welche durch dieselben vier Puncte gehen, bilden ein Curvenbüschel zweiter Ordnung. Die vier Puncte seien a, b, c, o. Unter den Kegelschnitten des Büschels sind immer drei, welche aus dem System zweier Geraden bestehen. Es sind dies die drei Paare Gegenseiten $[bc, ao]$, $[ca, bo]$, $[ab, co]$ des vollständigen Vierecks, dem die Kegelschnitte sämmtlich umgeschrieben sind.

Legt man durch einen der Scheitel des Vierecks, z. B. a, eine beliebige Transversale A, so schneidet diese jeden Kegelschnitt des Büschels in einem zweiten Puncte und umgekehrt,

jeder Punct der Transversale bestimmt einen Kegelschnitt des Büschels, der eben durch diesen Punct und die vier gegebenen *a*, *b*, *c*, *o* gehen musz. Das Curvenbüschel und die Punctreihe in der dasselbe von der Transversale *A* geschnitten wird, sind demnach zwei projectivische geometrische Gebilde. Mit andern Worten, das Doppelverhältnisz von vier Puncten, in denen vier *gegebene* Kegelschnitte des Büschels eine beliebige durch einen Basispunct gelegte Transversale schneiden, ist *constant* für jede Richtung der Transversale und für jeden Basispunct. Nach Nr. 46. haben wir wirklich die Relation, dasz dies Doppelverhältnisz gleich dem von vier Kegelschnitten des Büschels ist.

Es folgt weiter, dasz zwei Transversalen *A* und *B*, die durch zwei beliebige Basispuncte *a* und *b* gehen, die Kegelschnitte des Büschels in zwei projectivischen Punctreihen schneiden, wenn man nur diejenigen Puncte *m* und *m'* als entsprechende annimmt, in denen ein und derselbe Kegelschnitt von den beiden Transversalen geschnitten wird. Nun ist augenblicklich klar, dasz der Durchschnittspunct der beiden Transversalen sich selbst zugeordnet ist, da der durch ihn gelegte Kegelschnitt des Büschels in ihm beide Transversalen schneidet. Folglich geht nach Nr. 3. und Nr. 60. jede Gerade *mm'*, welche zwei entsprechende Puncte der beiden Punctreihen verbindet, durch einen festen Punct *j*. Jede Gerade, die durch *j* geht, schneidet die Transversalen *A* und *B* in zwei Puncten, die auf demselben Kegelschnitt des Büschels liegen, folglich geht die Gerade *co*, die zusammen mit *ab* einen Kegelschnitt des Büschels ausmacht, durch *j*; die Puncte, in denen *A* und *bc*, so wie *B* und *ao* sich schneiden, liegen mit *j* in gerader Linie, und ebenso sind die Puncte, in denen *A* und *bo*, sowie *B* und *ac* sich schneiden, mit *j* in gerader Linie.

64. Aufgaben. Angenommen, es seien fünf Puncte *a*, *b*, *c*, *d*, *e* auf einem Kegelschnite gegeben und die Puncte *a*, *b*, *c*, *e'*, *f* sollen auf einem zweiten Kegelschnitte liegen, so haben diese beiden Kegelschnitte offenbar drei Puncte *a*, *b*, *c* gemeinschaftlich, die *von vorn herein* gegeben sind. Man soll den vierten Durchschnittspunct construieren, ohne die Kegelschnitte selbst zu beschreiben.

Man ziehe die Geraden *ad* und *be'*. Sie mögen bezüglich *A* und *B* heiszen. Die Gerade *A* trifft den zweiten Kegelschnitt in einem Puncte *e*, der mittelst des Satzes von *Pascal* sich ohne Construction dieser Curve bestimmen läszt. Ebenso trifft *B* den ersten Kegelschnitt in einem Puncte *d'*, der sich auf dieselbe Weise construieren läszt. Die Geraden *dd'* und *ee'* schneiden sich in *f*. Ist *m* der gemeinschaftliche Punct von *A* und *bc*, *m'* der gemeinschaftliche Punct von *B* und *fm*, so ist der Durchschnittspunct *o* von *am'* und *fc* der gesuchte. Mit Bezugnahme auf das, was in der vorigen Nummer auseinander gesetzt ist, wird man augenblicklich die Richtigkeit der Construction einsehen *).

§. 12.

Construction der Curven dritter Ordnung durch neun gegebene Puncte.

65. Construction mittelst eines Stralen- und eines Kegelschnittbüschels. Der allgemeine Satz in Nr. 50. heiszt für $n = 2$ und $n' = 1$:

Lehrsatz I. *Der Ort der Durchschnittspuncte der Stralen eines Stralenbüschels mit den entsprechenden Kegelschnitten eines ihm projectivischen Curvenbüschels zweiter Ordnung, ist eine Curve der dritten Ordnung, welche durch die vier gemeinschaftlichen Puncte der Kegelschnitte und durch den Mittelpunct des Stralenbüschels geht.*

Ist *o* das Centrum des Stralenbüschels, so ist die Tangente der Curve dritter Ordnung im Puncte *o* der entsprechende Stral für den Kegelschnitt des Büschels, der durch *o* geht.

Ist *a* einer der Basispuncte des Kegelschnittbüschels, so ist die Tangente der Curve dritter Ordnung in *a* die Gerade, welche in diesem Puncte nach Nr. 51 *a.* denjenigen Kegelschnitt berührt, welcher dem Stral *oa* entspricht.

---

*) Man sehe *Schröter*, *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova*, Vratislaviae. 1862. p. 13.

Die inversen Sätze des vorhergehenden folgern sich aus Nr. 54:

Lehrsatz II. *Legt man durch vier feste Puncte einer Curve dritter Ordnung einen Kegelschnitt, so schneidet dieser die gegebene Curve in zwei Puncten m und m'. Die Gerade mm' geht durch einen fünften festen Punct o des Kegelschnittes. Das Kegelschnittbüschel durch die vier Puncte a, b, c, d und das Stralenbüschel durch o sind projectivisch. Der Punct o heisst der* Gegenpunct *(punto opposto) der Puncte a, b, c, d.*

Lehrsatz III. *Sind in einer Curve dritter Ordnung drei Puncte a, b, c gegeben und legt man durch einen vierten festen Punct in derselben Curve eine Gerade, die die gegebene Curve in den Puncten m und m' schneidet, so geht der Kegelschnitt, den man durch a, b, c, m, m' beschreiben kann, durch einen fünften festen Punct d der gegebenen Curve. Die Kegelschnitte durch a, b, c, d und die Geraden durch o entsprechen sich projectivisch.*

66. Die Methode von Chasles zur Construction derselben. Wir stellen jetzt die Aufgabe, durch neun gegebene Puncte *a, b, c, d, e, f, g, h, j* eine Curve der dritten Ordnung zu beschreiben, und zwar mittelst zweier projectivischer Büschel, das eine von Kegelschnitten, das andere ein Stralenbüschel. Um die Basen der beiden Büschel festzulegen, sind fünf Puncte nötig, aber einer derselben ist nach Nr. 57. nicht willkürlich. Die vier übrigen Puncte kann man beliebig unter den gegebenen neun Puncten auswählen.

Jenachdem der nicht willkürliche Punct dem Stralenbüschel oder dem Kegelschnittbüschel zugeteilt wird, ergeben sich zwei verschiedene Arten der Construction der Curven dritter Ordnung, entsprechend den beiden obigen Sätzen II. und III. in Nr. 65. Wir geben hier nur die erste Art der Construction, wie sie *Chasles* gezeigt hat*).

*) *Construction de la courbe du 3me ordre déterminée par neuf points* (Comptes rendus, 30. Mai 1853).

In Betreff der zweiten Art der Construction der Curven dritter und

Wir construieren die fünf Kegelschnitte, die durch *a, b, c, d* und bezüglich durch *e, f, g, h, j* gehen. Das System dieser fünf Kegelschnitte möge durch das Symbol

$$(abcd)(e, f, g, h, j)$$

dargestellt werden. Es handelt sich jetzt nur darum, einen Punct *o* zu bestimmen, so dasz das System von fünf Geraden

$$o(e, f, g, h, j)$$

dem System der fünf Kegelschnitte projectivisch sei. Da nun dieses System nach Nr. 46. dem System der Tangenten der Kegelschnitte im Puncte *a* projectivisch ist, so fällt diese Aufgabe mit der in Nr. 62. und Nr. 64. gelösten zusammen. Bestimmt man den *Gegenpunct o* von *a, b, c, d*, so sind die erzeugenden Büschel bestimmt, und damit die Aufgabe gelöst.

67. Verschiedene Sätze über Curven dritter Ordnung. Betrachten wir jetzt zwei Curven dritter Ordnung, die durch je neun Puncte gehen, von denen aber vier *a, b, c, d* dieselben sind. Die beiden gegebenen Curven schneiden sich in weitern fünf Puncten, durch die ein Kegelschnitt bestimmt wird. Dieser läszt sich construieren, ohne die fünf Puncte zu kennen, das heiszt, ohne die Curven dritter Ordnung wirklich zu verzeichnen.

Jeder dem Viereck *abcd* umgeschriebene Kegelschnitt schneidet nämlich die erste Curve dritter Ordnung in zwei Puncten *m* und *n* und die andere Curve dritter Ordnung in zwei andern Puncten *m'* und *n'*. Die Geraden *mn* und *m'n'* schneiden die beiden Curven dritter Ordnung in zwei neuen *festen* Puncten *o* und *o'*, den Gegenpuncten von *a, b, c, d* in Bezug auf jede der beiden Curven. Nimmt man immer andere Kegelschnitte, so erzeugen die Geraden *omn* und *o'm'n'* zwei zu dem Büschel Kegelschnitte projectivische Stralenbüschel, die

---

überhaupt einer höheren Ordnung, sehe man die ausgezeichneten Abhandlungen:

Jonquières, Essai sur la génération des courbes géométriques etc. und *Härtenberger, Ueber die Erzeugung geometrischer Curven* (*Crelle-Borchardt's* Journal. T. 58. Berlin, Reimer. 1860. S. 54.)

folglich auch unter sich projectivisch sind. Die entsprechenden Stralen derselben erzeugen nun als Ort einen Kegelschnitt, der durch o und o', so wie durch die fünf unbekannten Durchschnittspuncte der beiden Curven dritter Ordnung geht. Er ist also der gesuchte.

a. Satz von Plücker. Von diesem Kegelschnitte kennen wir schon zwei Puncte o und o'; drei andere Puncte kann man aus den drei Paaren Gegenseiten des Vierecks $abcd$, als specielle Kegelschnitte des Büschels aufgefaszt, herleiten. Sind nämlich m und n die Puncte, in denen die erste der Curven der dritten Ordnung durch die Geraden bc und ad getroffen wird; m' und n' dieselben Puncte für die zweite Curve dritter Ordnung, so sind die Geraden mn und $m'n'$ zwei entsprechende Stralen der beiden projectivischen Stralenbüschel mit den Mittelpuncten o und o'; folglich liegt ihr Durchschnittspunct auf dem gesuchten Kegelschnitte. Dasselbe läszt sich von den andern Paaren Gegenseiten [ca, bd] und [ab, cd] zeigen.

Hieraus folgt:

Lehrsatz IV. *Von neun gemeinschaftlichen Puncten zweier Curven dritter Ordnung bestimmen fünf beliebige einen Kegelschnitt, der durch den Gegenpunct der andern vier in Bezug auf jede der gegebenen Curven geht*).*

b. Satz von Hart. Es seien a, b, c, d; a', b', c', d' acht gemeinschaftliche Puncte zweier Curven dritter Ordnung und o und o' die Gegenpuncte der beiden Systeme a, b, c, d und a', b', c', d' in Bezug auf die erste der gegebenen Curven. Die Gerade oo' schneidet diese Curve in einem dritten Puncte x. Aus der Definition des *Gegenpunctes* folgt, dasz die durch die Puncte a, b, c, d, o' und a', b', c', d', o gelegten Kegelschnitte beide durch x gehen müszen, und es ist daher x der neunte gemeinschaftliche Punct der beiden Curven dritter Ordnung**).

---

*) Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, S. 56.

**) Hart, *Construction by the ruler alone to determine the ninth point of intersection of two curves of the third degree.* (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 6, Cambridge 1851, p. 181.)

c. **Satz von Poncelet.** Sind a, b, c, d vier Puncte einer Curve dritter Ordnung, so ist ihr *Gegenpunct* o folgendermaszen construierbar. Es seien m und n die Puncte, in denen die Curve von den Geraden ab und cd geschnitten wird, so schneidet mn die Curve in o. Fallen nun die Puncte a, b, c, d in einen a zusammen, so fallen auch m und n in den Punct m zusammen, in welchem die Berührende in a die Curve schneidet; o wird also der Durchschnittspunct der Curve mit der Tangente in m. Nennen wir nach Nr. 39*b*. m den *Tangentialpunct* von a, so ist o der Tangentialpunct von m, also der *zweite Tangentialpunct* von a, und wir haben den Satz:

Lehrsatz V. *Hat eine Curve dritter Ordnung mit einem Kegelschnitt eine vierpunctige Berührung, so geht die Gerade, welche die beiden übrigen Durchschnittspuncte beider Curven verbindet, durch den zweiten Tangentialpunct des Berührungspunctes.*

Hieraus folgt unmittelbar:

Lehrsatz VI. *Hat ein Kegelschnitt eine fünfpunctige Berührung mit einer Curve der dritten Ordnung, so schneidet er dieselbe auf der Verbindungsgeraden des Berührungspunctes mit dessen zweitem Tangentialpuncte* *).

d. **Satz von Salmon.** Aus den Sätzen in *b*. und *c*. folgt, dasz, wenn zwei Curven dritter Ordnung zwei vierpunctige Berührungen in a und a' eingehen, der neunte Durchschnittspunct x mit den zweiten Tangentialpuncten o und o' der Berührungspuncte a und a' in gerader Linie liegt. Fallen a und a' zusammen, so fällt auch o und o' zusammen und x ist sein Tangentialpunct, das heiszt der *dritte Tangentialpunct* von a. Das gibt:

Lehrsatz VII. *Alle Curven dritter Ordnung, die in demselben Puncte eine achtpunctige Berührung mit einer gegebenen Curve dritter Ordnung eingehen, gehen durch den dritten Tangentialpunct des Berührungspunctes* **).

---

*) *Poncelet*, *Analyse des transversales*, p. 135.

**) *Salmon*, *On curves of the third order.* (Philosophical Transactions of the Royal Society, vol. 148, part. 2. London 1859. p. 535).

e. Einige weitere Sätze. Wendet man den Satz in Nr. 45 *b.* auf eine Curve dritter Ordnung an, so entsteht:

> Lehrsatz VIII. *Wird eine Curve dritter Ordnung von einer Curve n-ter Ordnung in 3n Puncten geschnitten, so liegen die Tangentialpuncte dieser Puncte alle in einer andern Curve der dritten Ordnung.*

Hieraus folgt unmittelbar nach Nr. 44.:

> Lehrsatz IX. *Die Kegelschnitte, welche in den Durchschnittspuncten einer Curve n-ter Ordnung mit einer solchen dritter Ordnung, mit letzterer eine fünfpunctige Berührung eingehen, schneiden dieselbe in 3n Puncten, die in einer zweiten Curve n-ter Ordnung liegen.*

Oder auch:

> Lehrsatz X. *Hat ein Kegelschnitt mit einer Curve dritter Ordnung eine fünfpunctige Berührung in a und schneidet sie in b, so hat, wenn a' und b' die Tangentialpuncte von a und b sind, ein zweiter Kegelschnitt in a' eine fünfpunctige Berührung mit der gegebenen Curve der dritten Ordnung und schneidet dieselbe in b'.*

Zweites Capitel.

Theorie der Polaren.

Theorie der Polaren.

§. 13.

Erklärung und Grundeigenschaften der Polaren.

68. Erklärung der Polaren; Anzahl derselben. Es seien eine ebene Curve C_n von der n-ten Ordnung und ein beliebiger Punct o in ihrer Ebene gegeben. Um o lasze man sich eine Transversale drehen, die in einer ihrer Lagen die Curve C_n in n Puncten

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

schneidet; dann ist der Ort der harmonischen Mittelpuncte des r-ten Grades für das System $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ in Bezug auf o als Pol eine Curve der r-ten Ordnung, da nach Nr. 11. auf jeder durch o gezogenen Geraden r Puncte des Ortes liegen. Eine solche Curve heiszt die *$(n-r)$-te Polare* des Punctes o in Bezug auf die gegebene Curve. Diese selbst heiszt die *Fundamental-* oder *Grundcurve* *).

Der Punct o erzeugt auf diese Weise $n-1$ Polaren der gegebenen Curve. Die *erste Polare* ist eine Curve der $(n-1)$-ten Ordnung; die *zweite Polare* eine solche der $(n-2)$-ten Ordnung; u. s. w.; die *letzte* oder *$(n-1)$-te Polare*, das heiszt der Ort der harmonischen Mittelpuncte des ersten Grades, ist eine Gerade **).

*) *Grassmann*, *Theorie der Centralen.* (*Crelles* Journal. T. 24. Berlin, Reimer. 1842. S. 262).

**) Der Satz ist für die harmonischen Mittelpuncte ersten Grades von *Cotes* gegeben. M. s. *Maclaurin*, *a. a. O.*, p. 205.

69. **Uebertragung der Sätze für harmonische Mittelpuncte auf Polaren.** Die in §. 3. bewiesenen Sätze für die harmonischen Mittelpuncte eines Systems von n Puncten auf einer Geraden laszen sich in ebenso viele Eigenschaften der Polaren einer gegebenen Curve übertragen.

a. **Der Satz in Nr. 12.** Der Lehrsatz in Nr. 12. läszt sich folgendermaszen faszen:

> **Lehrsatz I.** *Ist m ein Punct der $(n-r)$-ten Polare von o, so ist o umgekehrt ein Punct der r-ten Polare von m**);

oder auch:

> **Lehrsatz II.** *Der Ort der Puncte, deren r-te Polare durch einen festen Punct o geht, ist die $(n-r)$-te Polare des Punctes o.*

So ist z. B. die erste Polare von o der Ort der Pole, deren gerade Polaren durch o gehen; die zweite Polare der Ort der Pole, deren conische Polaren durch diesen Punct gehen; u. s. w.

b. **Der Satz in Nr. 13.** Aus dem Satze in Nr. 13. folgt augenblicklich:

> **Lehrsatz III.** *Ein beliebiger Punct o hat dieselbe s-te Polare, sowol in Bezug auf die gegebene Curve C_n, als in Bezug auf jede als Fundamentalcurve betrachtete Polare einer höheren Ordnung desselben Punctes o.*

So ist z. B. die zweite Polare von o in Bezug auf C_n die erste Polare der ersten Polare desselben Punctes in Bezug auf C_n; die dritte Polare ist die erste Polare in Bezug auf die zweite Polare und gleichzeitig die zweite Polare in Bezug auf die erste Polare; u. s. w.

c. **Der Satz in Nr. 14.** Das Theorem in Nr. 14. gibt ebenso:

---

*) *Bobillier*, *Théorèmes sur les polaires successives.* (Annales de *Gergonne*, t. 19. Nismes 1828—29, p. 305).

Lehrsatz IV. *Die r'-te Polare eines Punctes o' in Bezug auf die r-te Polare eines andern Punctes o in Bezug auf C_n fällt mit der r-ten Polare von o zusammen in Bezug auf die r'-te Polare von o' nach C_n* *).

Dieser Satz ist, wie sich später zeigen wird, durch seine vielen Folgerungen äuszerst fruchtbar. So ergibt sich z. B. die im Folgenden auseinandergesetze Eigenschaft durch Vergleichung mit dem Satz in Nr. 69*a.* fast von selbst.

d. Folgerung aus dem Vorhergehenden. Die r'-te Polare von o' in Bezug auf die r-te Polare von o gehe durch einen Punct m, und es gehe die r-te Polare von o in Bezug auf die r'-te Polare von o' gleichzeitig durch denselben Punct; dann folgt aus Nr. 69*a.*, dasz die $[(n-r')-r]$-te Polare von m nach der r'-ten Polare von o' genommen durch o geht, und dasz gleichzeitig o auch ein Punct der r'-ten Polare von o' ist, wenn diese nach der $[(n-r')-r]$-ten Polare von m genommen wird. Daher der Satz:

Lehrsatz V. *Geht die r'-te Polare von o' in Bezug auf die r-te Polare von o durch den Punct m, so geht die r'-te Polare von o' in Bezug auf die $(n-r-r')$-te Polare von m durch o.*

70. Tangenten vom Pol an die Grundcurve. Wir kehren zur Definition in Nr. 68. zurück. Nehmen wir den Pol o auf der Grundcurve selbst, so dasz dieser also die Stelle eines der n Puncte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ vertritt, so ist der Punct o der harmonische Mittelpunct des ersten Grades für jede beliebige Transversale. Fällt nun die Transversale mit der Tangente in o zusammen, so gilt o für zwei der Puncte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. In diesem Falle wird aber nach Nr. 17. der harmonische Mittelpunct ersten Grades unbestimmt, und es ist erlaubt, jeden beliebigen Punct der Transversale dafür zu nehmen; diese ist daher in unserm Falle selbst der Ort der harmonischen Mittelpuncte ersten Grades, und darin liegt der Satz:

Lehrsatz VI. *Die gerade Polare (d. i. die letzte) eines*

*) Plücker, *Ueber ein neues Coordinatensystem.* (Crelles Journal. T. 5. Berlin. Reimer. 1830. S. 34).

Punctes der Grundcurve selbst ist die Tangente dieses Punctes.

Liegt der Pol nicht in der Grundcurve, aber die Transversale ist eine Tangente, so fallen zwei der Puncte a_1, a_2, a_3, ..., a_n mit dem Berührungspuncte zusammen. Dieser ist also nach Nr. 16. ein harmonischer Mittelpunct des $(n-1)$-ten Grades, also ein Punct der ersten Polare. Das gibt:

Lehrsatz VII. *Die erste Polare eines beliebigen Punctes schneidet die Grundcurve in den Berührungspuncten der Tangenten, welche sich von diesem Puncte aus an die Curve legen lassen.*

Die erste Polare ist von der $(n-1)$-ten Ordnung, sie schneidet daher C_n in $n(n-1)$ Puncten. Es laszen sich also durch einen beliebigen Punct $n(n-1)$ Tangenten an die Grundcurve legen *). Das liefert den Satz:

Lehrsatz VIII. *Eine Curve der n-ten Ordnung ist im Allgemeinen von der $n(n-1)$-ten Classe.*

71. Polaren eines Punctes der Grundcurve. Wird der Pol o auf der Fundamentalcurve selbst angenommen, so fällt für jede Richtung der durch o gezogenen Transversale einer der Durchschnittspuncte a_1, a_2, a_3, ..., a_n mit o zusammen. Es ist folglich nach Nr. 17. o ein harmonischer Mittelpunct eines jeden beliebigen Grades des Systems a_1, a_2, a_3, ..., a_n für o als Pol, und es gehen demgemäsz alle Polaren von o von der ersten bis zur $(n-1)$-ten durch diesen Punct.

Aber wir können noch weiter gehen. Ist nämlich die Transversale eine Tangente von C_n in o, so gilt dieser Punct für zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte, also auch nach Nr. 17. für zwei harmonische Mittelpuncte eines beliebigen Grades, und damit ergibt sich der Satz:

Lehrsatz IX. *Die Polaren aller Grade eines Punctes o der Grundcurve berühren diese im Pole selbst.*

---

*) *Poncelet*, *Solution ... suivie d'une théorie des polaires réciproques etc.* (Annales de *Gergonne*, t. 8., Nismes 1817—1818, p. 214).

Aus derselben Nr. 17. folgt noch:

Lehrsatz X. *Die erste Polare eines Punctes o der Fundamentalcurve ist der Ort der harmonischen Mittelpuncte des $(n-2)$-ten Grades für den Pol o und die $n-1$ Puncte, in denen C_n von einer veränderlichen Transversale durch o geschnitten wird. Die $n(n-1)-2$ Puncte, in denen die erste Polare von o C_n ausser dem Puncte o, in dem sich nach dem Obigen die Curven berühren, schneidet, sind die Berührungspuncte der durch o gelegten anderweitigen Tangenten von C_n.*

72. Einflusz der vielfachen Puncte. Es habe die Curve C_n in d einen r-fachen Punct, es schneide also jede Gerade, welche durch d geht, die Curve in diesem Puncte r-mal, dann ist nach Nr. 17. d ein r-facher Punct für jede Polare dieses Punctes.

Jede Tangente an die r Zweige der Curve C_n schneidet diese aber nach Nr. 31. in $r+1$ Puncten, die mit d zusammenfallen, so dass für diese Tangenten als Transversalen betrachtet $r+1$ von den Puncten a mit d zusammenfallen, und damit also d auch für $r+1$ harmonische Mittelpuncte eines beliebigen Grades für d als Pol zu betrachten ist (M. s. Nr. 17.). Die r Tangenten von C_n im Puncte d berühren also in ihm auch die r Zweige einer beliebigen Polare von d.

Daraus folgt ferner noch, dasz die $(n-1)$-te, $(n-2)$-te, ..., $(n-r+1)$-te Polare von d unbestimmt werden, und dasz die $(n-r)$-te Polare aus dem System der r Tangenten, das wir schon in Nr. 31. betrachteten, besteht.

Diese letzte Eigenschaft ergibt sich auch offenbar daraus, dasz, wenn man nach Nr. 68. eine Tangente an einen der Zweige der Curve C_n in d als eine durch den Pol d gelegte Transversale betrachtet, $r+1$ der Durchschnittspuncte a mit diesem Pol zusammenfallen, und also nach Nr. 17. jeder Punct dieser Transversale als harmonischer Mittelpunct r-ten Grades aufgefaszt werden kann, dasz also folglich das Büschel der Tangenten an die r Zweige der Curve C_n den Ort der harmonischen Mittelpuncte des r-ten Grades in Bezug auf d als Pol darstellt.

73. **Einflusz der vielfachen Puncte; Fortsetzung.** Es sei o ein beliebiger Punct in der Ebene der Curve C_n, die in d einen r-fachen Punct besitzt, und die Gerade od gezogen; dann werden natürlich für diese Transversale r der Puncte a mit d zusammenfallen. Dieser Punct ist daher nach Nr. 16. der Ort für $r-s$ harmonische Mittelpuncte des $(n-s)$-ten Grades, $s<r$. Das liefert den Satz:

> **Lehrsatz XI.** *Ein r-facher Punct der Fundamentalcurve ist ein $(r-s)$-facher Punct der s-ten Polare eines beliebigen Poles.*

a. **Specieller Fall, wenn C_n aus n Geraden besteht.** Wir wollen das Vorhergehende auf den Fall anwenden, dasz C_n aus dem System von n Geraden besteht, die sich in d schneiden. Für C_n wird dann d ein n-facher Punct, und er ist folglich auch für die erste Polare eines beliebigen Poles o für C_n als Grundcurve ein $(n-1)$-facher Punct. Diese Polare besteht also aus $(n-1)$ Geraden, die durch d gehen.

Mit andern Worten: Ziehen wir durch o eine beliebige Transversale, welche die n Geraden in $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ schneidet, bezeichnen wir ferner die harmonischen Mittelpuncte des $(n-1)$-ten Grades durch $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}$, so ist das System der $n-1$ Geraden

$$d(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1})$$

nach Nr. 20. die erste Polare von o. Nach Nr. 18. folgt nun aber ferner, dasz, so lange der Pol o sich auf einer Geraden bewegt, die durch d geht, diese erste Polare stets dieselbe bleibt.

Fallen von den n gegebenen Geraden s in eine einzige da zusammen, so fallen auch nach Nr. 16. $s-1$ harmonische Mittelpuncte des $(n-1)$-ten Grades mit a zusammen, und es repräsentiert daher da, was auch o sei, $n-1$ der Geraden dm.

b. **Polare eines Winkels.** Für $n=2$ erhält man den speciellen Fall:

> **Lehrsatz XII.** *Ist die Fundamentalcurve aus zwei Geraden $d(a_1, a_2)$ zusammengesetzt, so ist die Polare eines*

Punctes o in Bezug auf die beiden gegebenen Geraden der zu do zugeordnete harmonische Stral. Fallen beide Gerade zusammen, so fällt auch die Polare mit ihnen zusammen für jeden beliebigen Punct als Pol.

Die soeben definierte Polare zweier Geraden nennt man die *Polare von o für den Winkel $a_1 da_2$.*

74. Einflusz der vielfachen Puncte; Schlusz. Wir wenden uns wieder zur Betrachtung einer beliebigen Curve C_n, die in d einen r-fachen Punct besitzt. Ist o ein beliebiger Pol, so geht seine erste Polare nach Nr. 73. $(r-1)$-mal durch d, und die r Tangenten von C_n in d bilden die $(n-r)$-te Polare des Punctes d selbst. Dem analog bilden natürlich die $(r-1)$ Tangenten im Puncte d an die erste Polare von o die $[(n-1)-(r-1)]$-te Polare von d in Bezug auf die erste Polare von o, oder auch, was dasselbe ist, nach Nr. 69c. die erste Polare von o in Bezug auf die $(n-r)$-te Polare von d. Betrachtet man nun noch Nr. 73a., so hat man den Satz:

Lehrsatz XIII. *Hat die Fundamentalcurve einen r-fachen Punct d, so bilden die $r-1$ Tangenten, die man von d an die erste Polare eines beliebigen Punctes o legen kann, gleichzeitig die erste Polare von d in Bezug auf das Büschel der r Tangenten der Fundamentalcurve in d.*

a. Folgerung 1. Hieraus folgt mit Bezug auf Nr. 73a. dasz alle ersten Polaren der Puncte einer Geraden, welche durch d geht, in diesem Puncte dieselben Tangenten haben.

b. Folgerung 2. Fallen auszerdem s der Tangenten C_n im Puncte d in eine einzige Gerade zusammen, so ist nach Nr. 73a. diese auch $(s-1)$-mal Tangente an die erste Polare von o, folglich repräsentiert dann d nach Nr. 32. $r(r-1)+s-1$ Durchschnittspuncte der Curve C_n und der ersten Polare. Da also die Zahl der noch übrigen Durchschnittspuncte gleich $n(n-1)-r(r-1)-(s-1)$ ist, diese Zahl aber nach Nr. 70. ausdrückt, wieviel Tangenten sich durch o an die Fundamentalcurve legen laszen, natürlich vorausgesetzt, d sei der einzige vielfache Punct, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Lehrsatz XIV. *Hat die Fundamentalcurve einen r-fachen Punct, mit s zusammenfallenden Tangenten, so wird dadurch die Classe der Curve um $r(r-1)+s-1$ Einheiten vermindert.*

c. **Folgerung 3.** Diese allgemeine Eigenschaft läszt sich für $r=2$, $s=1$ und $r=2$, $s=2$ nach Nr. 73 *b.* folgendermaszen faszen:

Lehrsatz XV. *Hat die Fundamentalcurve in d einen Doppelpunct, so geht die erste Polare eines beliebigen Poles durch d, und berührt in diesem Puncte den zu do in Bezug auf die beiden Tangenten der Grundcurve in d zugeordneten harmonischen Stral.*

Lehrsatz XVI. *Ist d für die Fundamentalcurve ein Rückkehrpunct, so geht die erste Polare jedes Punctes durch d, und berührt daselbst die Rückkehrtangente der gegebenen Curve.*

Die erste Polare von o schneidet demgemäsz C_n auszer in d in noch $n(n-1)-2$ oder $n(n-1)-3$ Puncten, jenachdem d einen Doppelpunct oder eine Spitze bildet. Folglich gilt der Satz:

Lehrsatz XVII. *Die Classe einer Curve erniedrigt sich um zwei Einheiten für jeden Doppelpunct und um drei Einheiten für jede Spitze*).*

d. **Folgernug 4.** Für ein beliebiges r und $s=1$ entsteht:

Lehrsatz XVIII. *Hat C_n einen r-fachen Punct, mit r verschiedenen Tangenten, so erniedrigt sich die Classe der Curve um $r(r-1)$ Einheiten, das heiszt, ein r-facher Punct mit r verschiedenen Tangenten hat dieselbe Wirkung, als hätte die Curve $\frac{1}{2}r(r-1)$ Doppelpuncte.*

Dies gewinnt grosze Evidenz, wenn man beachtet, dasz der gemeinschaftliche Durchschnittspunct von r Zweigen einer

*) Plücker, *Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes.* (Crelles Journal. T. 12, Berlin, Reimer. 1834. p. 107).

Curve eigentlich der Ort von $\frac{1}{2}r(r-1)$ Doppelpuncten ist, welche aus den Durchschnitten der r Zweige zu zwei und zwei entstehen.

Haben nun noch s der Zweige eine gemeinschaftliche Tangente, so entstehen durch Combination jedes dieser Zweige mit dem folgenden $s-1$ Spitzen. Jede andere Combination der sämmtlichen Zweige zu zwei gibt einen gewöhnlichen Doppelpunct, und das liefert den Satz:

Lehrsatz XIX. *Ein r-facher Punct mit s zusammenfallenden Tangenten vermindert die Classe einer Curve um eben soviel Einheiten, als $\frac{1}{2}r(r-1)-(s-1)$ Doppelpuncte und $s-1$ Spitzen zusammengenommen.*

75. Der Satz von Maclaurin. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die beiden harmonischen Mittelpuncte des ersten Grades für die beiden Systeme von Puncten

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n;$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n,$$

in denen die Fundamentalcurve C_n durch zwei Transversalen geschnitten wird, welche durch den Pol o gehen, so ist die Gerade $\mathfrak{ab}$ die letzte Polare von o. Legt man nun durch die Puncte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ eine zweite Curve der n-ten Ordnung C'_n, so ist die Gerade $\mathfrak{ab}$ auch in Bezug auf C'_n die Polare von o, so dasz, wenn wir jetzt die beiden Transversalen $oa_1a_2\ldots a_n$ und $ob_1b_2\ldots b_n$ sich einander unendlich nähern laszen, der Satz entsteht:

Lehrsatz XX. *Berühren sich zwei Curven der n-ten Ordnung in n Puncten, die in gerader Linie liegen, so hat jeder Punct dieser Geraden für beide Curven dieselbe gerade Polare* *).

Als zweite Curve kann man das System der n Tangenten der Curve C_n in den Puncten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ betrachten; dann geht der obige Satz über in:

*) Salmon, *A treatise on the higher plane curves*, Dublin 1852, p. 54.

Lehrsatz XXI. *Ein Pol, der mit n Puncten einer Curve n-ter Ordnung auf derselben Geraden liegt, hat sowol in Bezug auf die Curve, als in Bezug auf ihre Tangenten in den n gegebenen Puncten dieselbe gerade Polare.*

Das Letztere läszt sich nach Nr. 11. auch so aussprechen:

Lehrsatz XXII. *Legt man eine zweite Transversale durch den Punct o, und schneidet diese die Curve in den Puncten $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$; die n Tangenten aber in $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, so existiert immer die Relation*

$$\frac{1}{oc_1}+\frac{1}{oc_2}+\frac{1}{oc_3}+\dots+\frac{1}{oc_n}=\frac{1}{ot_1}+\frac{1}{ot_2}+\frac{1}{ot_3}+\dots+\frac{1}{ot_n}\,{}^{*}).$$

76. **Der Satz von Cayley.** Es seien n Gerade $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ und ein Pol o gegeben, alle natürlich in einer Ebene. Es sei ferner P_r die gerade Polare von o in Bezug auf das System von $n-1$ Geraden

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \dots,\ A_{r-1},\ A_{r+1},\ \dots,\ A_n,$$

als Ort der $(n-1)$-ten Ordnung betrachtet, und a_r der Punct, in dem P_r die Gerade A_r schneidet, dann ist dem Satze in Nr. 15. gemäsz a_r der harmonische Mittelpunct des ersten Grades des Systems der n Puncte, in denen die n gegebenen Geraden von der Transversale oa_r geschnitten werden, für o als Pol. Das gibt den Satz:

Lehrsatz XXIII. *Sind n Gerade und ein Pol o gegeben, so liegt der Punct, in dem eine beliebige dieser Geraden die gerade Polare von o für die andern $n-1$ Geraden schneidet, auf der geraden Polare von o für alle n Gerade**).*

Aus diesem Satze folgt für $n=3$:

Lehrsatz XXIV. *Die gerade Polare eines Punctes in Bezug auf die Winkel eines Dreiseits schneiden die Gegen-*

---

*) *Maclaurin*, *a. a. O.* p. 201.

**) *Cayley*, *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position.* (*Crelles* Journal. T. 34. Berlin, Reimer. 1847. p. 274).

seiten in drei Puncten, die in gerader Linie liegen, und zwar auf der geraden Polare des gegebenen Punctes in Bezug auf das Dreiseit, als Ort der dritten Ordnung aufgefasst,

und umgekehrt:

Lehrsatz XXV. *Werden die drei Seiten bc, ca, ab eines Dreiecks abc von einer Transversale bezüglich in den Puncten a', b', c' geschnitten, und sind a_1, b_1, c_1 der Reihe nach die conjugierten harmonischen Puncte von a', b', c' bezüglich der Punctpaare b, c; c, a; a, b, so schneiden sich die Geraden aa_1, bb_1, cc_1 in demselben Puncte, dem Pole der Transversale.*

77. Curvenbüschel aus den ersten Polaren der Puncte einer Geraden. Die ersten Polaren zweier beliebiger Puncte *o* und *o'* für eine gegebene Curve C_n schneiden sich in $(n-1)^2$ Puncten, deren jeder nach Nr. 69*a.*, da er in beiden ersten Polaren liegt, eine gerade Polare besitzt, die sowol durch *o* als durch *o'* geht. Folglich entsteht der Satz:

Lehrsatz XXVI. *Eine Gerade ist die Polare von $(n-1)^2$ verschiedenen Puncten, welche die Durchschnittspuncte der ersten Polaren zweier beliebiger ihrer Puncte sind.*

Oder auch:

Lehrsatz XXVII. *Die ersten Polaren aller Puncte einer Graden bilden ein Curvenbüschel, das durch dieselben $(n-1)^2$ Puncte geht*).*

a. Zahl der Polaren, welche alle andern bestimmen. Dieser Eigenschaft gemäsz haben alle ersten Polaren, welche durch einen Pnnct *o* gehen, noch $(n-1)^2-1$ Puncte gemein, das heiszt sie bilden ein Curvenbüschel, deszen Basis aus den $(n-1)^2$ Polen der geraden Polare von *o* besteht. Durch zwei Puncte *o* und *o'* geht nur eine erste Polare, und zwar

*) Bobillier, *Démonstrations de quelques théorèmes sur les lignes etc.* (Annales de Gergonne t. 18. Nismes 1827—1828. p. 97).

diejenige, deren Pol der Durchschnittspunct der geraden Polaren von o und o' ist.

Es genügen folglich drei erste Polaren um alle andern zu individualisieren. Denn sind drei erste Polaren C', C'', C''' gegeben, deren Pole nicht in gerader Linie liegen, und verlangt man diejenige zu beschreiben, welche durch zwei gegebene Puncte o und o' geht, so löst sich diese Aufgabe folgendermaszen.

Die beiden Curven C' und C'' bestimmen ein Curvenbüschel. Ebenso bestimmen die Curven C' und C''' ein solches. Die beiden Curven, welche bezüglich zu diesen beiden Büscheln gehören und durch o gehen, individualisieren ein drittes Curvenbüschel; die Curve dieses Büschels nun, welche durch o' geht, ist offenbar die gesuchte.

b. Einflusz eines den drei gegebenen Polaren gemeinschaftlichen Punctes. Gehen drei erste Polaren, deren Pole nicht in gerader Linie liegen, durch denselben Punct, so ist dieser auch allen übrigen Polaren gemeinschaftlich, also für die Fundamentalcurve nach Nr. 73. ein Doppelpunct. Seine gerade Polare ist daher nach Nr. 72. unbestimmt, da sie nach Nr. 69*a*. durch jeden Punct der Ebene gelegt werden kann.

78. Doppelpuncte der Polaren. Die r-te Polare eines Punctes o möge einen Doppelpunct o' haben, so dasz also nach Nr. 73. die erste Polare eines beliebigen Punctes m, die r-te Polare von o als Grundcurve betrachtet, durch o' geht, dann wird auch, dem Satze in Nr. 69*d*. gemäsz, die erste Polare von m, die $(n-r-1)$-te Polare von o' als Grundcurve angenommen, durch o gehen; auszerdem wird nach Nr. 69*a*. die $(r+1)$-te Polare von o durch o' gehen und o auf der $(n-r-1)$-ten Polare von o' liegen. Aus Nr. 77*b* folgt dann:

Lehrsatz XXVIII. *Hat die r-te Polare von o einen Doppelpunct in o', so hat umgekehrt die $(n-r-1)$-te Polare von o' einen Doppelpunct in o* *).

---

*) Steiner, *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven.* (Crelles Journal T. 47. Berlin. Reimer, 1853. S. 4).

Hat z. B. die erste Polare von o einen Doppelpunct o', so ist die conische Polare von o' das System zweier Geraden, die sich in o schneiden, und umgekehrt.

a. Rückkehrpuncte der Grundcurve. Hat die gegebene Curve C_n einen Rückkehrpunct d, so löst sich die conische Polare dieses Punctes nach Nr. 72. in zwei Gerade auf, die beide mit der Tangente von C_n in d zusammenfallen. Jeder Punct m dieser Tangente kann also als ein Doppelpunct der conischen Polare von d angesehen werden, so dasz d ein Doppelpunct der ersten Polare von m ist. Das liefert den Satz:

Lehrsatz XXIX. *Hat die Fundamentalcurve eine Spitze, so geht die erste Polare eines beliebigen Punctes der Rückkehrtangente zweimal durch den Rückkehrpunct.*

Diese ersten Polaren, für welche d ein Doppelpunct ist, bilden nach Nr. 77*a.* ein Curvenbüschel. Es sind daher unter ihnen nach Nr. 48. zwei, für welche d eine Spitze bildet. Nach Nr. 72. ist nun eine dieser beiden Polaren diejenige, für welche d selbst der betreffende Pol ist.

b. Weitere Folgerungen. Es sei o' ein Doppelpunct der s-ten Polare eines Punctes m in Bezug auf die r-te Polare eines andern Punctes o als Fundamentalcurve, das heiszt nach Nr. 69*c.*, es gehe auch die r-te Polare von o in Bezug auf die s-te Polare von m als Grundcurve zweimal durch o', dann folgt, wenn wir auf die s-te Polare von m den für die Curve C_n in Nr. 78. bewiesenen Satz anwenden, dasz die $[(n-s)-r-1]$-te Polare von o' in Bezug auf die s-te Polare von m als Grundcurve in o einen Doppelpunct besitzt. Das gibt den Satz:

Lehrsatz XXX. *Hat die s-te Polare von m in Bezug auf die r-te Polare von o einen Doppelpunct in o', so hat umgekehrt die s-te Polare von m in Bezug auf die $(n-r-s-1)$-te Polare von o' in o einen Doppelpunct.*

79. Rückkehrpuncte der Polaren. Hat die r-te Polare von o in o' eine Spitze, so geht nach Nr. 78. die $(n-r-1)$-te Polare von o' zweimal durch o. Bezeichnen wir nun durch m einen beliebigen Punct der Rückkehrtangente der r-ten Polare

von o im Rückkehrpuncte o', so hat nach Nr. 78*a*. die erste Polare von m bezogen auf dieselbe r-te Polare von o als Grundcurve in o' einen Doppelpunct, und es geht demgemäsz nach Nr. 78*b*. die erste Polare von m, die $(n-r-2)$-te Polare von o' als Grundcurve betrachtet, zweimal durch o.

Setzt man noch $r=1$, so folgt der Satz:

Lehrsatz XXXI. *Hat die erste Polare von o eine Spitze in o', so hat jeder Punct der Rückkehrtangente, auf die cubische Polare als Grundcurve bezogen, zur conischen Polare ein Paar sich in o schneidende Gerade*).*

Es ist nun augenblicklich klar, dasz jede dieser beiden Geraden die andere bestimmt, das heiszt, alle zusammengehörigen Paare von Geraden bilden eine quadratische Involution, und folglich müszen auf der Rückkehrtangente zwei Puncte existieren, von denen jeder als conische Polare ein Paar in eine Gerade, die durch o geht, zusammenfallende gerade Linien hat, die cubische Polare von o' als Grundcurve angesehen.

Der Punct o ist ein Doppelpunct für jede conische Polare eines Punctes m der Rückkehrtangente für die cubische Polare von o' als Grundcurve, und deshalb ist umgekehrt nach Nr. 78. m ein Doppelpunct der conischen Polare von o nach der cubischen Polare von o' als Grundcurve. Das gibt den Satz:

Lehrsatz XXXII. *Die Gerade, welche die erste Polare von o im Rückkehrpuncte o' berührt, ist, als das System zweier zusammenfallender Geraden betrachtet, die conische Polare von o in Bezug auf die cubische Polare von o' als Grundcurve.*

Die Doppelstralen der obigen Involution mögen die Rückkehrtangente in o_1 und o_2 schneiden. Nun ist o_1 ein Doppelpunct sowol der conischen Polare von o, immer auf die cubische Polare von o' als Grundcurve bezogen, als für die conische Polare, die durch oo_1 dargestellt wird, und die conische Polare von o hat nach Nr. 78. einen Doppelpunct in o und einen zweiten auf

*) Unter *gerader*, *conischer* und *cubischer Polare* verstehen wir bezüglich die *letzte*, *vorletzte* und *vorvorletzte Polare*, die resp. eine *gerade Linie*, einen *Kegelschnitt* und eine *Curve der dritten Ordnung* repräsentieren.

$o_1 o_2$, das heiszt, sie ist das System zweier zusammenfallender Geraden. Es bilden als oo_2 und oo_1 für sich die conischen Polaren der Puncte o_1 und o_2, und darin liegt der Satz:

Lehrsatz XXXIII. *Hat die erste Polare von o einen Rückkehrpunct o', so gibt es auf der Rückkehrtangente zwei Puncte o_1 und o_2, welche zusammen mit o ein Dreieck bilden, dessen Seiten, als je zwei zusammenfallende Gerade betrachtet, die conischen Polaren ihrer Gegenscheitel darstellen für die cubische Polare von o' als Grundcurve.*

80. Charakteristische Eigenschaften der Wendepuncte. Wir betrachten jetzt eine Wendetangente der gegebenen Curve C_n und ihren Berührungspunct oder den Wendepunct i. Nehmen wir den Pol o auf der Wendetangente und betrachten diese, wie nach Nr. 68. erlaubt ist, als Transversale, so sind von den dort betrachteten Puncten a nach Nr. 29. drei im Wendepuncte i vereinigt. Dieser ist damit nach Nr. 16. der Ort für zwei harmonische Mittelpuncte des $(n-1)$-ten Grades und für einen solchen des $(n-2)$-ten Grades; folglich geht die erste Polare von o durch i und berührt in diesem Puncte C_n, und die zweite Polare von o geht ebenfalls durch i.

Da somit durch i die zweite Polare eines jeden Punctes o der Wendetangente geht, so musz nach Nr. 69*a*. die conische Polare von i alle Puncte dieser Tangente enthalten, das heiszt:

Lehrsatz XXXIV. *Die conische Polare eines Wendepunctes besteht aus zwei Geraden, deren eine die Wendetangente selbst ist.*

Ist i' der Durchschnittspunct der beiden Geraden, welche die conische Polare des Wendepunctes i bilden, so hat nach Nr. 78. die erste Polare von i' in i einen Doppelpunct; das liefert den Satz:

Lehrsatz XXXV. *Ein Wendepunct einer Curve ist ein Doppelpunct für jede erste Polare eines Punctes der Wendetangente.*

Liegt ein Punct p auf der Curve C_n und hat derselbe als conische Polare ein System von zwei Geraden, so ist er entweder ein Doppelpunct oder ein Wendepunct der gegebenen

Curve. Denn, entweder gehen beide Gerade durch p, und die gerade Polare des Punctes wird daher unbestimmt, dann ist p ein Doppelpunct der Curve; oder eine einzige der beiden Geraden geht durch p, und ist dann nach Nr. 71. Tangente der Curve in diesem Puncte. Dann gehören alle Puncte dieser Geraden sowol der $(n-1)$-ten, als der $(n-2)$-ten Polare von p an, folglich geht die erste und die zweite Polare jedes Punctes dieser Geraden durch p, was nach Nr. 16. nur möglich ist, wenn diese Gerade mit der gegebenen Curve in p eine dreipunctige Berührung eingeht.

81. **Einhüllende der geraden Polaren der Puncte einer gegebenen Curve.** Nach dem Vorhergehenden entspricht jedem Puncte der Ebene der gegebenen Curve C_n eine gerade Polare. Dem analog stellen wir nun die Frage:

Wenn der Pol sich auf einer Curve C_m der m-ten Ordnung bewegt, von welcher Classe ist dann die Einhüllende der geraden Polaren dieses Punctes? das heiszt, wieviel gerade Polaren gehen durch einen beliebigen Punct o, wenn die Pole aller dieser Polaren auf C_m liegen?

Nun liegt nach Nr. 69*a*., wenn die gerade Polare durch o geht, der Pol auf der ersten Polare von o, die C_m in $m(n-1)$ Puncten schneidet. Diese Puncte sind nun natürlich die einzigen Puncte der Curve C_m, deren gerade Polaren durch o gehen, und damit haben wir den Satz:

Lehrsatz XXXVI. *Bewegt sich der Pol auf einer Curve der m-ten Ordnung, so werden die geraden Polaren von einer Curve der $m(n-1)$-ten Classe umhüllt.*

a. **Die gegebene Curve ist eine Gerade.** Für $m=1$ entsteht:

Lehrsatz XXXVII. *Durchläuft der Pol eine Gerade R, so ist die Einhüllende der geraden Polaren eine Curve der $(n-1)$-ten Classe.*

b. **Einflusz eines vielfachen Punctes.** Hat die Fundamentalcurve einen r-fachen Punct d, so geht die erste Polare

von o nach Nr. 73. $(r-1)$-mal durch d. Folglich schneidet, wenn auch R durch diesen Punct geht, die erste Polare diese Gerade noch in $(n-1)-(r-1)$ Puncten. Die Classe der gesuchten Einhüllenden ist also in diesem Falle $n-r$.

c. r-facher Punct mit s zusammenfallenden Tangenten. Haben auszerdem s Zweige von C_n in d eine gemeinschaftliche Tangente, so berührt dieselbe in diesem Puncte nach Nr. 74. $s-1$ Zweige der ersten Polare von o. Ist daher R diese Tangente, so bleiben noch $(n-1)-(r-1)-(s-1)$ Durchschnittspuncte derselben mit der ersten Polare von o übrig, und die Classe der Einhüllenden ist in diesem Falle nur $n-(r+s-1)$.

82. Einhüllende Polaren. Wie die Theorie der harmonischen Mittelpuncte eines Systems von Puncten einer Geraden zur Grundlage der Theorie der Polaren bezogen auf eine Grundcurve dient, so führen die Eigenschaften der harmonischen Axen eines Büschels von Geraden, die von einem Puncte ausgehen (M. s. Nr. 19. und Nr. 20.), auf die Begründung einer analogen Theorie der *einhüllenden Polaren* in Bezug auf eine Fundamentalcurve von bestimmter Classe.

Ist K eine Curve der m-ten Classe, R eine Gerade in ihrer Ebene, und zieht man von einem Puncte p der Geraden R die m Tangenten an K, so werden die harmonischen Axen des r-ten Grades des Systems dieser m Tangenten für die Gerade R, wenn p sich auf R bewegt, von einer Curve der r-ten Classe umhüllt. Die Gerade R gibt also $m-1$ *einhüllenden Polaren* den Ursprung, deren Classen mit $m-1$ anfangen und mit 1 schlieszen. Die umhüllende Polare der höchsten Classe berührt die Tangenten an K in den Puncten, die diese Curve mit R gemein hat, daher schneidet R die Curve K in $m(m-1)$ Puncten, und es gilt folglich der Satz:

Lehrsatz XXXVIII. *Eine Curve der m-ten Classe ist im Allgemeinen von der $m(m-1)$-ten Ordnung.*

Diese Ordnung erniedrigt sich aber um zwei Einheiten für jede Doppeltangente und um drei Einheiten für jede Wendetangente der Fundamentalcurve, u. s. w., u. s. w.

§. 14.

Sätze über Curvensysteme.

83. **Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven zweier projectivischer Reihen.** Wir haben in Nr. 34. den Ausdruck *Reihe von Curven* definiert. Man nennt nun zwei *Reihen* von Curven *projectivisch*, wenn einem beliebigen, aber gegebenen Gesetze gemäsz einer jeden Curve der ersten Reihe eine einzige Curve der zweiten entspricht und umgekehrt.

Wir beantworten zuerst die Frage, von welcher Ordnung ist der Ort der Durchschnittspuncte der correspondierenden Curven zweier projectivischer Reihen bezüglich von der m-ten Ordnung und dem Index M und der n-ten Ordnung und dem Index N? Wir können diese Frage auch dahin faszen. Wieviel Puncte gibt es auf einer beliebigen Geraden, durch welche je zwei entsprechende Curven hindurchgehen?

Zur Beantwortung derselben sei a ein beliebiger Punct der Transversale, durch den M Curven der ersten Reihe hindurchgehen. Die M entsprechenden Curven der zweiten Reihe schneiden nun die Transversale in $\text{M}.n$ Puncten a'. Nehmen wir dagegen einen beliebigen Punct a' der Transversale, durch den N Curven der zweiten Reihe gehen, so schneiden die entsprechenden N Curven der ersten Reihe die Transversale in $\text{N}.m$ Puncten a. Jedem Puncte a entsprechen daher $\text{M}.n$ Puncte a' und jedem Puncte a' $\text{N}.m$ Puncte a; beziehen wir nun die Puncte a und a' auf denselben Anfang o, der beliebig auf der Transversale angenommen werden kann, so besteht unter den Abschnitten oa und oa' eine Gleichung, die für oa' vom $\text{M}.n$-ten, für oa von $\text{N}.m$-ten Grade ist. Läszt man daher a mit a' zusammenfallen, so ist die Gleichung für die Abschnitte oa vom $(\text{M}.n+\text{N}.m)$-ten Grade, das heiszt auf der Transversale liegen $\text{M}.n+\text{N}.m$ Puncte des gesuchten Ortes. Hieraus erhält man das allgemeine Theorem*):

*) Jonquières, *Théorèmes généraux etc.* p. 117.

Lehrsatz I. *Der Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven zweier projectivischer Reihen bezüglich von der m-ten Ordnung und dem Index* M *und und von der n-ten Ordnung und dem Index* N *ist im Allgemeinen höchstens von der* (M.*n* + N.*m*)*-ten Ordnung.*

Wir sagen *„Im Allgemeinen höchstens"*. weil verschiedene Umstände die Ordnung der resultierenden Curve erniedrigen können. Z. B., wenn die beiden Reihen *singuläre* correspondierende Elementepaare enthalten. Die Grösze M.*n* + N.*m* musz man also vielmehr als eine obere Grenze betrachten, wie als eine absolute Zahl. Im Folgenden Nr. 111 *bis* werden wir hierzu in der Theorie der Kegelschnitte bemerkenswerte Beispiele betrachten*).

a. Folgerung für die Tangenten der Curven zweier Reihen. Für M = N = 1 erhält man aus diesem Satze das in Nr. 50. für den Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven zweier Curvenbüschel bewiesene Theorem wieder. Im Falle *m* = *n* = 1, hat man den Satz:

Lehrsatz II. *Entsprechen die Tangenten einer Curve* M*-ter Classe den Tangenten einer andern Curve der* N*-ten Classe projectivisch, so ist der Ort der Durchschnittspuncte je zweier homologer Tangenten eine Curve der* (M + N)*-ten Ordnung.*

b. Einhüllende der Verbindungsgeraden entsprechender Puncte zweier Curven. Analog kann man den folgenden Satz beweisen, den man aber auch aus dem oben gegebenen mittelst des Princips der Dualität ableiten kann:

Lehrsatz III. *Entspricht einem jeden Puncte einer Curve der* M*-ten Ordnung, einem beliebigen Gesetze gemäss, ein einziger Punct einer andern Curve der* N*-ten Ordnung, und umgekehrt, so wird die Gerade, welche zwei homologe Puncte beider Curven verbindet, von einer Curve der* (M + N)*-ten Classe umhüllt.*

*) Man sehe auch einen Brief *Jonquières'* an den Verfaszer im *Giornale di Matematiche ad uso etc.*, Napoli 1863, p. 128., sowie *Bemerkungen über Curvenreihen von beliebigem Index* von *G. Battaglini.* (*Grunerts* Archiv T. XLI. Heft I. S. 26).

84. Polaren eines Punctes in Bezug auf die Curven einer Reihe. Von welchem Index ist die Reihe der r-ten Polaren eines Punctes o, die Curven einer Reihe der n-ten Ordnung und vom Index $\varkappa$ als Grundcurven angesehen? das heiszt, wieviele von diesen Polaren gehen durch einen beliegen Punct, z. B. etwa durch den gegebenen Pol o selbst?

Offenbar gehen nur diejenigen Polaren durch o, deren Fundamentalcurven der Reihe sich in o schneiden. Da dieses nicht mehr als $\varkappa$ sind, so haben wir den Satz:

Lehrsatz IV. *Die r-ten Polaren eines beliebigen Punctes in Bezug auf die Curven der n-ten Ordnung einer Reihe vom Index $\varkappa$ bilden eine neue Reihe ebenfalls vom Index $\varkappa$, aber von der $(n-r)$-ten Ordnung. Die zweite Reihe ist der ersten projectivisch.*

a. Anwendung auf ein Curvenbüschel. Für $\varkappa = 1$ entsteht:

Lehrsatz V. *Die r-ten Polaren eines Punctes bezogen auf die Curven eines Curvenbüschels bilden ein neues, dem ersten projectivisches Curvenbüschel*)*

b. Anwendung auf die geraden Polaren einer Reihe. Ist $r = n - 1$, so entsteht der Satz:

Lehrsatz VI. *Die geraden Polaren eines Punctes in Bezug auf die Curven einer Reihe vom Index $\varkappa$ werden von einer Curve der $\varkappa$-ten Classe umhüllt.*

c. Anwendung auf die geraden Polaren eines Büschels. Hieraus erhalten wir wieder, wenn wir $\varkappa = 1$ setzen:

Lehrsatz VII. *Die geraden Polaren eines gegebenen Punctes in Bezug auf die Curven eines Büschels schneiden sich in demselben Puncte und bilden ein dem Curvenbüschel projectivisches Stralenbüschel.*

85. Curven einer Reihe, die von einer gegebenen

*) *Bobillier, Recherches sur les lois qui régissent les lignes etc.* (Annales de *Gergonne*, t. 18. Nismes 1827—1828, p. 256).

Geraden berührt werden. Wir wollen jetzt die Reihe näher betrachten, welche nach Nr. 84. durch die ersten Polaren eines Punctes o bezogen auf die Curven einer Reihe der n-ten Ordnung und vom Index $\varkappa$ gebildet wird. Nach Nr. 70. sind nun bekanntlich die Durchschnittspuncte einer der Curven der n-ten Ordnung mit ihrer entsprechenden ersten Polare die Berührungspuncte der durch o an dieselben gezogenen Tangenten. Wenden wir daher, da beide Reihen projectivisch sind, auf sie den allgemeinen Satz von *Jonquières* in Nr. 83. an, so ergibt sich das neue Theorem:

Lehrsatz VIII. *Zieht man von einem Puncte o die Tangenten an alle Curven einer Reihe der n-ten Ordnung vom Index $\varkappa$, so liegen die Berührungspuncte im Allgemeinen alle auf einer Curve höchstens von der $\varkappa(2n-1)$-ten Ordnung.*

Da der Punct o auf $\varkappa$ Curven der Reihe liegen muss, so wird der Ort der Berührungspuncte natürlich $\varkappa$-mal durch diesen Punct gehen und dort die Tangenten der obigen $\varkappa$ Curven berühren. Jede Gerade durch o schneidet daher diesen Ort noch in $2\varkappa(n-1)$ Puncten, und es gilt also der Satz:

Lehrsatz IX. *Unter den Curven einer Reihe n-ter Ordnung und vom Index $\varkappa$ berühren im Allgemeinen höchstens je $2\varkappa(n-1)$ eine beliebige gegebene Gerade.*

Für $\varkappa = 1$ kommt man auf den Satz in Nr. 49. zurück.

86. Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf die Curven einer Reihe. Welches ist die Ordnung des Ortes eines Punctes, für welchen eine gegebene Gerade in Bezug auf alle Curven einer Reihe der n-ten Ordnung und vom Index $\varkappa$ die gerade Polare darstellt?

Wir brauchen zur Beantwortung dieser Frage nur die Zahl der Puncte zu kennen, die auf einer beliebigen Transversale, z. B. auf der gegebenen Geraden selbst, diese Eigenschaft besitzen. Auf dieser Geraden können nun nur diejenigen Pole liegen, in denen dieselbe irgend eine Curve der Reihe berührt; beachten wir daher noch den letzten Satz, so erhalten wir hieraus:

Lehrsatz X. *Der Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf die sämmtlichen Curven einer Reihe der n-ten Ordnung vom Index* $\varkappa$ *ist im Allgemeinen eine Curve höchstens von der* $2\varkappa(n-1)$*-ten Ordnung.*

Ist $\varkappa = 1$, so gehört ein Punct a, in Gemäszheit des Satzes in Nr. 84*c*., dem fraglichen Orte an, wenn seine geraden Polaren in Bezug auf die gegebenen Curven sich sämmtlich in einem Puncte b der gegebenen Geraden schneiden. In diesem Falle gehen aber nach Nr. 69*a*. die ersten Polaren von b durch a, und damit ergibt sich der Satz*):

Lehrsatz XI. *Die ersten Polaren eines Punctes in Bezug auf die sämmtlichen Curven eines Curvenbüschels n-ter Ordnung bilden ein neues Curvenbüschel. Durchläuft der Pol eine gegebene Gerade, so erzeugen die Basispuncte des zweiten Curvenbüschels eine Curve der* $2(n-1)$*-ten Ordnung, die gleichzeitig der Ort der Pole der gegebenen Geraden in Bezug auf die sämmtlichen Curven des gegebenen Büschels ist.*

87. **Ort der Pole, für welche die gerade Polare einer Curve und für die einzelnen Curven einer Reihe dieselbe ist.** Von welcher Ordnung ist der Ort der Puncte, welche in Bezug auf eine gegebene Curve der n-ten Ordnung und in Bezug auf jede Curve C_m einer gegebenen Reihe vom Index $\varkappa$ dieselbe gerade Polare haben?

Um die Aufgabe zu lösen, untersuchen wir, wieviele Puncte des gesuchten Ortes auf einer beliebigen Transversale liegen. Zu dem Ende sei a ein beliebiger Punct der Transversale, A die gerade Polare dieses Punctes in Bezug auf C_n; dann ist nach dem Obigen (Nr. 86.) der Ort der Pole der Geraden A in Bezug auf die Curven C_m allerhöchstens eine Curve der $2\varkappa(m-1)$-ten Ordnung, die natürlich die Transversale in $2\varkappa(m-1)$ Puncten a' schneidet. Nehmen wir umgekehrt auf der Transversale beliebig den Punct a', so werden die geraden Polaren von a' bezogen auf die Curven C_m von einer Curve der $\varkappa$-ten Classe umhüllt, welche nach Nr. 81*a*. mit der Einhüllenden der $(n-1)$-

*) *Bobillier*, a. a. O.

ten Classe der geraden Polaren der Puncte der Transversale in Bezug auf C_n als Fundamentalcurve $\text{M}(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten hat. Diese $\text{M}(n-1)$ Tangenten sind Polaren von eben so viel Puncten a der Transversale in Bezug auf C_n als Grundcurve. Jedem Puncte a entsprechen demnach höchstens $2\text{M}(m-1)$ Puncte a' und jedem Puncte a' $\text{M}(n-1)$ Puncte a, folglich gibt es nach Nr. 83. höchstens $2\text{M}(m-1)+\text{M}(n-1)$ Puncte a, welche mit ihren entsprechenden Puncten a' zusammenfallen. Daraus entsteht der Satz:

Lehrsatz XII. *Der Ort eines Punctes, der sowol in Bezug auf eine Curve der n-ten Ordnung, als in Bezug auf die Curven einer Reihe der m-ten Ordnung und vom Index* M *dieselbe gerade Polare besitzt, ist im Allgemeinen eine Curve höchstens von der* $\text{M}(n+2m-3)$*-ten Ordnung.*

a. Einflusz der Doppelpuncte und Spitzen. Hat die gegebene Curve einen Doppelpunct, oder eine Spitze in d, so wird die gerade Polare dieses Punctes in Bezug auf C_n nach Nr. 72. unbestimmt. Man kann daher als solche die Tangenten an jede der M Curven C_m annehmen, welche durch d gehen, und es wird folglich die Curve der $\text{M}(n+2m-3)$-ten Ordnung, die wir durch K bezeichnen wollen, M-mal durch jeden Doppelpunct und jede Spitze von C_n gehen.

b. Einflusz der Spitzen. Ist d ein Rückkehrpunct der Curve C_n, und wenden wir die obige, für eine beliebige Transversale angestellte Betrachtung auf die Rückkehrtangente T an, so sieht man, wenn man beachtet, dasz für unsern Fall die Einhüllende der geraden Polaren der Puncte von T für die Curve C_n nach Nr. 81 *a.* von der $(n-3)$-ten Classe ist, dasz also jedem Puncte a' $\text{M}(n-3)$ Puncte a entsprechen werden; dasz die Tangente T auszer im Puncte d die Curve K noch in $\text{M}(n+2m-5)$ Puncten schneidet, dasz also der Punct d für 2M Durchschnittspuncte der Linien K und T gilt. In d sind folglich nach Nr. 32. 3M Durchschnittspuncte der Curven K und C_n vereinigt.

c. Zahl der Curven der Reihe, welche die gegebene Curve berühren. Hieraus folgern wir, dasz, wenn die gegebene Curve C_n δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Rückkehrpuncte be-

sitzt, sie von K in noch weiteren $\varkappa\{n(n+2m-3)-2\delta-3\varkappa\}$ Puncten geschnitten wird. Diese sind aber der Definition der Curven K gemäsz die Puncte, in denen C_n von den Curven der gegebenen Reihe berührt wird, und es gilt daher der Satz:

Lehrsatz XIII. *In einer Reihe m-ter Ordnung und vom Index* $\varkappa$ *gibt es im Allgemeinen höchstens*

$$\varkappa[n(n+2m-3)-2\delta-3\varkappa]$$

Curven, welche eine gegebene Curve der n-ten Ordnung berühren, die δ *Doppelpuncte und* $\varkappa$ *Spitzen enthält*).*

d. **Zahl der Tangenten von einem Puncte an eine Curve.** Für $\varkappa = m = 1$ entsteht hieraus:

Lehrsatz XIV. *Die Zahl der Tangenten, welche man von einem gegebenen Puncte an eine Curve n-ter Ordnung mit* δ *Doppelpuncten und* $\varkappa$ *Spitzen ziehen kann, ist gleich* $n(n-1)-2\delta-3\varkappa$.

Dies Resultat erhielten wir schon in Nr. 74*c*.

88. **Doppelpuncte der Curven eines Büschels.** Wieviel Curven eines Curvenbüschels m-ter Ordnung haben einen Doppelpunct?

Zur Beantwortung der Frage nehmen wir beliebig drei Puncte o, o', o'' an, die nicht in gerader Linie liegen. Die ersten Polaren dieser Puncte in Bezug auf die Curven des gegebenen Büschels erzeugen nach Nr. 84*a*. drei weitere projectivische Curvenbüschel der $(m-1)$-ten Ordnung, wenn wir nur als correspondierende Curven dieser drei Büschel diejenigen Polaren der drei Puncte o, o', o'' betrachten, welche derselben Curve des gegebenen Büschels entsprechen. Hat nun eine der gegebenen Curven einen Doppelpunct, so schneiden sich nach Nr. 73. in ihm die drei sich entsprechenden Polaren von o, o' und o''; die Doppelpuncte des gegebenen Curvenbüschels sind also diejenigen Puncte der Ebene, durch welche drei entsprechende Curven der drei projectivischen ersten Polarenbüschel hindurchgehen.

*) *Bischoff, Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven.* (*Crelle-Borchardts* Journal, T. 56. Berlin, Reimer. 1859, S. 172). — *Jonquières, Théorèmes généraux etc.*, p. 120.

Nun erzeugen das erste und zweite Polarenbüschel durch die Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven nach Nr. 50. eine Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung; eine zweite Curve derselben Ordnung erzeugen das erste und dritte Polarenbüschel. Beide Curven gehen durch die $(m-1)^2$ Basispuncte des ersten Polarenbüschels, sie schneiden sich also noch in $3(m-1)^2$ Puncten, welche offenbar die gesuchten sind. Das gibt:

Lehrsatz XV. *Die Curven eines Curvenbüschels m-ter Ordnung enthalten* $3(m-1)^2$ *Doppelpuncte.*

a. Einflusz eines gemeinschaftlichen Berührungspunctes der Curven des Büschels. In einem der oben angenommenen Puncte o mögen sich jetzt die sämmtlichen Curven des Büschels berühren. Dann hat nach Nr. 47. eine von ihnen, etwa C_m, in diesem Puncte einen Doppelpunct; o' liege auf der gemeinschaftlichen Tangente des Büschels, und o'' sei beliebig angenommen. Nun gehen nach Nr. 71. alle erste Polaren von o bezogen auf die sämmtlichen Curven des Büschels durch o und berühren in ihm die Gerade oo', und eine derselben, diejenige nämlich, welche der Curve C_m entspricht, hat nach Nr. 72. in o einen Doppelpunct. Auch die Polaren von o' gehen nach Nr. 70. sämmtlich durch o, von den Polaren des Punctes o'' aber enthält nach Nr. 73. nur diejenige den Punct o, welche der Curve C_m entspricht.

Die Polaren von o und von o' erzeugen nach Nr. 52*a*. eine Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung, für welche o ein Doppelpunct und oo' eine der beiden Tangenten dieses Punctes darstellt. Ebenso erzeugen die Polaren von o und o'' eine zweite Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung, die nach Nr. 51*b*. ebenfalls zweimal durch o geht. Der Punct o, der für beide Curven der $2(m-1)$-ten Ordnung ein Doppelpunct ist, gilt daher für vier Durchschnittspuncte. Da nun in o die Polaren dieses Punctes einander berühren, so sind die weiteren Basispuncte des von ihnen gebildeten Büschels noch $(m-1)^2-2$. Auszer diesen Puncten und dem Puncte o schneiden sich die Curven der $2(m-1)$-ten Ordnung daher noch in

$$4(m-1)^2-4-[(m-1)^2-2]=3(m-1)^2-2$$

Puncten. Daher der Satz:

Lehrsatz XVI. *Berühren sich die Curven eines Büschels sämmtlich in einem Puncte o, so gilt dieser für zwei der Doppelpuncte des Büschels.*

b. Einflusz eines Rückkehrpunctes einer beliegen Curve des Büschels. Ist nun *o* für eine der Curven des Büschels, etwa C_m, eine Spitze, nehmen wir ferner o' auf der Rückkehrtangente an und für o'' einen beliebigen andern Punct, so bilden die ersten Polaren von *o* in Bezug auf die gegebenen Curven ein zweites Curvenbüschel, in welchem die Polare in Bezug auf C_m nach Nr. 72. ebenfalls eine Spitze in *o* mit der Rückkehrtangente oo' hat. Dieser Curve entspricht in dem Polarenbüschel von o' eine Curve, welche nach Nr. 78*a.* ebenfalls zweimal durch *o* geht, und im Polarenbüschel von o'' eine Curve, welche nach Nr. 74*c.* durch *o* geht und in ihm oo' berührt. Folglich hat die durch die beiden ersten Polarenbüschel erzeugte Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung nach Nr. 51*f.* in *o* einen Doppelpunct. Auszerdem erzeugen das erste und dritte Polarenbüschel nach Nr. 51*g.* eine zweite Curve derselben Ordnung, welche einfach durch *o* geht und dort die Gerade oo' berührt. Diese beiden Curven haben daher in *o* zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte, und es bleiben daher, wenn wir von den $(m-1)^2$ Basispuncten des ersten Büschels absehen, noch $3(m-1)^2-2$ Durchschnittspuncte übrig. In diesem Falle haben wir also folgenden Satz:

Lehrsatz XVII. *Hat eine Curve eines Büschels einen Rückkehrpunct, so zählt dieser für zwei der Doppelpuncte des Büschels.*

c. Die Curven des Büschels berühren sich sämmtlich, und der Berührungspunct ist für eine derselben eine Spitze. Wir setzen endlich voraus, dasz alle Curven des Büschels durch *o* gehen, und dieser Punct für C_m eine Spitze bilde. Wir nehmen o' auf der Rückkehrtangente und o'' auf der Geraden, welche in *o* alle anderen Curven des Büschels berührt. Die Polaren von *o* gehen dann sämmtlich durch diesen Punct und berühren in ihm nach Nr. 71. die Tangente oo', aber eine von ihnen, nämlich die, welche C_m entspricht, hat nach Nr. 72. in *o* ebenfalls eine Spitze mit der Rückkehrtangente oo'. Die Polaren von o'' gehen nach Nr. 70. eben-

falls sämmtlich durch o, und eine unter ihnen, die der Curve C_m entspricht, berührt nach Nr. 74 *c*. in o die Gerade oo'. Unter den Polaren von o' geht endlich nur eine einzige, nämlich die, welche C_m entspricht, durch o, aber sie hat in o nach Nr. 78 *a*. einen Doppelpunct. Folglich hat die durch die Polarenbüschel von o und o'' erzeugte Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung nach Nr. 52 *a*. in o einen Doppelpunct mit oo' und oo'' als Tangenten, dagegen hat die durch die Polarenbüschel von o und o' erzeugte zweite Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung nach Nr. 51 *c*. in o eine Spitze mit der Rückkehrtangente oo'. Alles in Allem haben also die beiden so erhaltenen Curven in o einen Doppelpunct und die Tangente oo' gemein, das heiszt nach Nr. 32., in o sind fünf ihrer Durchschnittspuncte vereinigt. Auszer dem Puncte o, in dem sich alle Polaren des ersten Büschels berühren, und den übrigen $(m-1)^2-2$ Basispuncten dieses Büschels bleiben also noch $3(m-1)^2-3$ Durchschnittspuncte der beiden Curven $2(m-1)$-ter Ordnung übrig. Daher hat man den Satz:

Lehrsatz XVIII. *Ist o ein gemeinschaftlicher Punct sämmtlicher Curven eines Büschels und für eine derselben eine Spitze, so zählt er für* drei *der Doppelpuncte dieses Büschels.*

d. Die Curve von Steiner. Wenden wir den allgemeinen, am Anfange dieser Nummer bewiesenen Satz auf das in Nr. 77. betrachtete erste Polarenbüschel der Puncte einer Geraden an, alle Polaren auf dieselbe Curve der n-ten Ordnung C_n beziehend, so haben wir den Satz:

Lehrsatz XIX. *Auf jeder Geraden gibt es $3(n-2)^2$ Puncte, von denen jeder in Bezug auf eine gegebene Curve n-ter Ordnung zur ersten Polare eine Curve mit einem Doppelpunct hat.*

Nehmen wir nun noch auf den Satz in Nr. 78. Rücksicht, so läszt sich der letzte Satz auch so faszen:

Lehrsatz XX. *Der Ort der Pole der ersten Polaren, welche einen Doppelpunct besitzen, in Bezug auf eine Curve n-ter Ordnung, oder auch der Ort der Durchschnittspuncte der Paare von Geraden, welche conische Polaren bilden, ist eine Curve der $3(n-2)^2$-ten Ordnung.*

Diesen Ort nennen wir die *Curve von Steiner* *) der Fundamentalcurve.

e. Einflusz einer Spitze der Grundcurve auf die Curve von Steiner. Hat die Fundamentalcurve in *d* eine Spitze, so ist nach Nr. 78 *a.* jeder Punct der Rückkehrtangente der Pol einer ersten Polare, die in *d* einen Doppelpunct besitzt. In diesem Falle ist also die Rückkehrtangente ein Teil der Curve von *Steiner*.

89. Weitere Eigenschaften der Doppelpuncte des Büschels. Die gerade Polare eines festen Punctes in Bezug auf die Curven eines Büschels gehen nach Nr. 84 *c.* sämmtlich durch einen zweiten festen Punct. Betrachten wir nun eine Curve des Büschels, die in *d* einen Doppelpunct hat, so ist die gerade Polare dieses Punctes nach Nr. 72. unbestimmt, es müszen daher die geraden Polaren von *d* in Bezug auf sämmtliche übrige Curven des Büschels in eine einzige Gerade zusammenfallen, und darin liegt der Satz:

Lehrsatz XXI. *Jeder Doppelpunct der Curven eines Curvenbüschels hat für jede Curve des Büschels dieselbe gerade Polare.*

Hieraus folgt mit Bezug auf Nr. 86.:

Lehrsatz XXII. *Der Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf sämmliche Curven eines Curvenbüschels der m-ten Ordnung ist eine Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung und enthält sämmtliche $3(m-1)^2$ Doppelpuncte des Curvenbüschels.*

Ebenso entsteht aus Nr. 87.:

Lehrsatz XXIII. *Der Ort der Puncte, welche in Bezug auf eine gegebene Curve C_n und auf die einzelnen Curven C_m eines Curvenbüschels dieselbe gerade Polare haben, ist eine Curve der $(n+2m-3)$-ten Ordnung, die ebenfalls durch sämmtliche $3(m-1)^2$ Doppelpuncte des*

---

*) Nach dem Namen des groszen deutschen Geometers, der sie, soviel ich weisz, zuerst betrachtete.

Büschels geht. Ausser diesen Puncten liegen auf der Curve der $(n+2m-3)$-ten Ordnung alle Puncte, in denen C_n von irgend einer Curve C_m des Büschels berührt wird.

Als speciellen Fall hat man hieraus:

Lehrsatz XXIV. *Wird eine Gerade von $2(m-1)$ Curven eines Curvenbüschels der m-ten Ordnung berührt, so liegen die $2(m-1)$ Berührungspuncte, sowie die $3(m-1)^2$ Doppelpuncte des Büschels auf einer Curve der $2(m-1)$-ten Ordnung, dem Ort der Pole der gegebenen Geraden in Bezug auf die sämmtlichen Curven des Büschels.*

90. Ort der Berührungspuncte der Curven zweier Büschel. Von welcher Ordnung ist der Ort der Berührungspuncte der Curven zweier Curvenbüschel der m-ten und m_1-ten Ordnung?

Zunächst ist es klar, dasz der gesuchte Ort durch sämmtliche $m^2+m_1^2$ Basispuncte der beiden Büschel gehen musz. Denn ist a ein Basispunct des ersten Büschels, so geht durch ihn eine Curve des zweiten Büschels. Zieht man nun die Tangente an diese Curve, so gibt es nach Nr. 46. eine Curve des ersten Büschels, welche diese Gerade in dem nämlichen Puncte berührt. Beachten wir nun noch, dasz jede Curve des ersten Büschels von den Curven des zweiten Büschels nach Nr. 87. in $m(n+2m_1-3)$ Puncten berührt wird, so wird jede Curve des ersten Büschels auszer den m^2 Basispuncten noch $m(m+2m_1-3)$ Puncte des gesuchten Ortes enthalten, das heiszt im Ganzen $m(2m+2m_1-3)$. Der gesuchte Ort ist daher von der $[2(m+m_1)-3]$-ten Ordnung. Er geht nicht nur durch die Basispuncte beider Büschel, sondern auch durch ihre $3(m-1)^2+3(m_1-1)^2$ Doppelpuncte (S. Nr. 88.), denn jeder dieser Puncte gilt für *zwei* Durchschnittspuncte der Curven des einen Büschels mit einer Curve des zweiten. Somit haben wir den Satz:

Lehrsatz XXV. *Die Berührungspuncte der Curven zweier Curvenbüschel von der m-ten und m_1-ten Ordnung liegen auf einer Curve der $[2(m+m_1)-3]$-ten Ordnung, welche durch die Basispuncte und die Doppelpuncte beider Büschel hindurchgeht.*

a. Die Curve von Hesse einer Fundamentalcurve.

Die beiden Curvenbüschel nehmen wir jetzt als erste Polarenbüschel für eine gegebene Curve C_n n-ter Ordnung als Grundcurve an, und setzen also $m = m_1 = n - 1$. Die Basispuncte der beiden Büschel sind nach Nr. 77. die Polaren von zwei Geraden, sie liegen also nach Nr. 69*a*. alle auf der ersten Polare des Durchschnittspunctes dieser beiden Geraden. Beide Büschel haben daher in diesem Falle eine Curve gemein, die offenbar einen Teil des oben nachgewiesenen Ortes ausmacht. Sehen wir von derselben ab, so bleibt als Ort der Berührungspuncte der Curven des einen Büschels mit denen des anderen eine Curve der Ordnung

$$4(n-1) - 3 - (n-1) = 3(n-2)$$

übrig, die durch die Doppelpuncte der gegebenen Büschel geht. Diese Curve der $3(n-2)$-ten Ordnung bleibt dieselbe, wenn man für die beiden betrachteten Polarenbüschel andere derartige einführt. Denn, da alle erste Polaren, die durch einen gegebenen Punct gehen, nach Nr. 77*a*. noch $(n-1)^2 - 1$ gemeinschaftliche Puncte haben und ein Curvenbüschel bilden, so müszen, wenn sich zwei erste Polaren in diesem Puncte berühren, alle andern ebenfalls in ihm die Tangente gemein haben.

Hieraus folgern wir, dasz der Ort der Berührungspuncte zweier erster Polaren die Doppelpuncte sämmtlicher erster Polarenbüschel enthält und also mit Bezug auf Nr. 78. auch der Ort der Pole derjenigen conischen Polaren ist, welche sich in zwei Gerade auflösen, das heiszt, wir können den Satz aussprechen:

Lehrsatz XXVI. ***Der Ort der Berührungspuncte der ersten Polaren in Bezug auf eine gegebene Curve n-ter Ordnung ist eine Curve der $3(n-2)$-ten Ordnung, die sich auch als Ort der Doppelpuncte der ersten Polaren, oder als Ort der Pole definieren läszt, deren conische Polaren ein Paar gerade Linien bilden.***

Dieser Curve geben wir den Namen *Curve von Hesse* der Fundamentalcurve, weil sie die geometrische Interpretation einer *Covariante* darstellt, welche *Sylvester* mit dem Namen *a Hessian* (nach dem Namen ihres Entdeckers *Hesse*) belegt hat, nämlich die Determinante aus den zweiten partiellen

Differentialquotienten einer gegebenen homogenen Form dreier Variablen*).

b. Andere Erklärung der Hesseschen Curve. Die Puncte, in denen sich die ersten Polaren zweier Puncte o und o' schneiden, sind nach Nr. 77. die Pole der Geraden oo'; die Berührungspuncte zweier erster Polaren bilden daher je zwei zusammenfallende Pole von oo'. Nennen wir nun für das Folgende die $(n-1)^2$ Pole einer und derselben Geraden *verbundene Pole* (poli congiunti), so können wir auch sagen.

Lehrsatz XXVII. *Die Curve von Hesse ist der Ort der Pole, welche mit einem ihrer verbundenen Pole zusammenfallen.*

c. Indicatricen eines Punctes. Nennen wir ferner *Indicatricen* eines Punctes das System der beiden Tangenten, welche man von ihm aus an seine conische Polare legen kann, so entsteht folgende weitere Definition:

Lehrsatz XXVIII. *Die Fundamentalcurve bildet mit der Hesseschen Curve zusammen den Ort der Puncte, deren Indicatricen sich auf eine einzige Gerade reducieren.*

91. Gemeinschaftliche Berührungspuncte der Curven dreier Büschel. In wieviel Puncten berühren sich die Curven dreier Curvenbüschel der m_1-ten, m_2-ten, m_3-ten Ordnung zu drei und drei?

Die Berührungspuncte der Curven der ersten beiden Büschel zu zwei und zwei bilden nach Nr. 90. eine Curve der $[2(m_1+m_2)-3]$-ten Ordnung, und dem analog bilden die Berührungspuncte der Curven des ersten und dritten Büschels zu zwei und zwei eine zweite Curve der $[2(m_1+m_3)-3]$-ten Ordnung. Diese beiden Curven haben nun die Basispuncte und die Doppelpuncte des ersten Büschels gemein, das heiszt $m_1^2+3(m_1-1)^2$

*) *Sylvester, On a theory of the syzygetic relations of tow rational integral functions.* (Philosophical transactions, vol. 143. part 3, London. 1853. p. 545.)

Puncte, die mit der Aufgabe nichts zu tun haben, sie schneiden sich aber auszerdem noch in anderen

$$[2(m_1+m_2)-3][2(m_1+m_3)-3]-[m_1^2+3(m_1-1)^2]$$
$$=4(m_1.m_2+m_2.m_3+m_3.m_1)-6(m_1+m_2+m_3-1)$$

Puncten, und dieses ist die gesuchte Zahl.

a. Einhüllende der Tangenten in den Berührungspuncten zweier Büschel. Ist $m=1$, so entsteht:

Lehrsatz XXIX. *Die gemeinschaftlichen Tangenten der Puncte, in denen sich die Curven zweier Büschel der m_1-ten und m_2-ten Ordnung berühren, werden von einer Curve der $[4m_1.m_2-2(m_1+m_2)]$-ten Classe umhüllt.*

b. Einhüllende der gemeinschaftlichen Tangenten der ersten Polaren einer Curve. Sind die Curven beider Büschel erste Polaren in Bezug auf dieselbe Curve C_n der n-ten Ordnung, das heiszt, ist $m_1=m_2=n-1$, so haben nach Nr. 90 *a.* die beiden Büschel eine Curve gemein, die von der $(n-1)$-ten Ordnung, also nach Nr. 70. von der $(n-1)(n-2)$-ten Classe ist. Diese Curve gehört nun offenbar zu der eben betrachteten Einhüllenden, und diese besteht demnach auszerdem noch aus einer Curve der $3(n-1)(n-2)$-ten Classe. Damit ergibt sich der Satz:

Lehrsatz XXX. *Die gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspuncten der ersten Polaren in Bezug auf eine Curve n-ter Ordnung werden von einer Curve der $3(n-1)(n-2)$-ten Classe umhüllt*).*

§. 15.

Geometrische Netze.

92. Erklärung eines Netzes; die Hessesche Curve eines Netzes. Das vollständige System von Curven m-ter

*) *Steiner*, a. a. O., S. 4—6.

Ordnung, die $\frac{1}{2}m(m+3)-2$ gemeinschaftlichen Bedingungen genügen, nennen wir ein ***geometrisches Netz der m-ten Ordnung,*** wenn durch zwei weitere beliebig gewählte Puncte nur eine einzige Curve des Systems hindurchgeht, das heiszt, wenn die Curven des Systems, welche durch einen und denselben Punct gehen, ein Curvenbüschel bilden *).

So bilden z. B. die ersten Polaren für eine gegebene Curve der n-ten Ordnung als Grundcurve nach Nr. 77 *a.* ein geometrisches Netz der $(n-1)$-ten Ordnung, und es laszen sich auch viele Eigenschaften dieser Polaren ganz auf die nämliche Weise für ein beliebiges Netz beweisen.

Nach Nr. 77 *a.* bestimmen zwei Curvenbüschel m-ter Ordnung, welche eine Curve gemein haben, oder drei Curven m-ter Ordnung, die nicht durch dieselben m^2 Puncte gehen, ein geometrisches Netz m-ter Ordnung.

Der Ort der Puncte, in denen sich zwei Curven eines Netzes der m-ten Ordnung, also auch noch eine unbegrenzte Zahl andere, berühren, ist eine Curve der $3(m-1)$-ten Ordnung. Diese Curve, die man die ***Hessesche Curve des Netzes*** nennen kann, ist nach Nr. 90 *a.* gleichzeitig der Ort der Doppelpuncte der Curven des Netzes.

Die gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspuncten der Curven des Netzes werden nach Nr. 91 *b.* von einer Curve der $3m(m-1)$-ten Classe umhüllt.

a. **Einflusz eines allen Curven des Netzes gemeinschaftlichen Punctes.** Angenommen, alle Curven eines Netzes hätten einen Punct a gemein, und es sei a' der zu a unendlich nahe Punct einer Geraden A, die durch a gezogen ist, so gehen eine unbegrenzte Zahl von Curven durch a', berühren also die Gerade A im Puncte a, und bilden in ihrer Gesammtheit ein Curvenbüschel. Ziehen wir nun eine zweite Gerade A_1 durch a, und ist in ihr a_1 der unendlich nahe Punct von a, so gibt es nur eine einzige Curve des Netzes, welche gleichzeitig durch a' und a_1 geht, die also in a einen Doppelpunct besitzt. Hieraus folgt:

*) *Möbius*, *a. a. O.*, S. 266. — *Steiner*, *a. a. O.*, S. 5.

Lehrsatz I. ***Haben die Curven eines Netzes sämmtlich einen Punct gemein, so ist derselbe für eine dieser Curven ein Doppelpunct, und diejenigen Curven, welche in diesem Puncte dieselbe Gerade berühren, bilden ein Curvenbüschel.***

b. Einflusz einer gemeinschaftlichen Tangente im gemeinschaftichen Puncte. Wir nehmen weiter an, es berührten alle Curven eines Netzes in einem und demselben Puncte a dieselbe Gerade T. Zieht man eine zweite beliebige Gerade A durch a, so existieren immer eine unbegrenzte Zahl von Curven des Netzes, die durch den zu a unendlich nahen Punct von A gehen, und die Gesammtheit dieser Curven bildet ein Curvenbüschel. Alle Curven dieses Büschels werden von T und von A in je zwei mit a zusammenfallenden Puncten geschnitten, dieser Punct ist daher für alle ein Doppelpunct, so dasz also das Büschel dasselbe bleibt, wenn man A sich um a drehen läszt. Unter den Curven dieses Büschels sind nach Nr. 48. zwei, für welche a ein Rückkehrpunct ist, und von diesen hat eine gleichzeitig die Gerade T zur Rückkehrtangente. Diese letzte Curve ist dadurch gegeben, dasz sie T in drei und A in zwei mit a zusammenfallenden Puncten schneiden musz.

93. Die Jacobische Curve dreier Curven. Wir bestimmen zunächst den Ort der Puncte, deren gerade Polaren in Bezug auf drei Curven C, C', C'' bezüglich von der m-ten, m'-ten, m''-ten Ordnung sich in einem Puncte schneiden, das heiszt mit andern Worten nach Nr. 69 *a.* den Ort der Puncte, in denen sich die ersten Polaren eines und desselben Punctes in Bezug auf die drei gegebenen Curven schneiden. Zu dem Ende ziehen wir durch einen beliebigen festen Punct o eine beliebige Transversale L und bestimmen die Puncte, in welchen sich je drei erste Polaren eines und desselben Punctes von L schneiden. Laszen wir dann diese Gerade L sich um o drehen, so erhalten wir auf diese Weise alle Puncte des gesuchten Ortes.

Die ersten Polaren der Puncte von L in Bezug auf C und C' bilden nun nach Nr. 77. zwei projectivische Curvenbüschel. Die entsprechenden Curven, das heiszt die Polaren eines und desselben Punctes von L, schneiden sich daher in den Puncten einer Curve K' der $(m+m'-2)$-ten Ordnung, welche durch die

Basispuncte beider Büschel hindurchgeht. Die Basis des ersten Büschels erhalten wir dabei durch die $(m-1)^2$ Durchschnittspuncte der ersten Polare von o in Bezug auf C mit einer beliebigen andern ersten Polare eines Punctes von L in Bezug auf dieselbe Curve.

Wir haben somit eine Curve K' bestimmt, die der Ort der Puncte ist, in welchen sich die zwei ersten Polaren eines beliebigen Punctes von L in Bezug auf die Curven C und C' schneiden.

Jede Gerade L, die wir durch o ziehen, individualisiert eine solche Curve K', von allen diesen Curven geht aber nur eine einzige durch einen beliebigen Punct p. Denn sollen durch p die ersten Polaren für C und C' als Grundcurven hindurchgehen, so ist der Pol derselben nach Nr. 69 *a*. der Durchschnittspunct p' der beiden geraden Polaren von p; p' bestimmt nun die Gerade L, die durch o geht, und diese Gerade endlich die Curve K', welche durch p geht. Laszen wir also L sich um o drehen, so erzeugt nach Nr. 41. die Curve K' ein Curvenbüschel.

Substituieren wir für die Curve C' die dritte C'', so erzeugt die Gerade L auf dieselbe Weise eine Curve K'' der $(m+m''-2)$-ten Ordnung, welche durch dieselben $(m-1)^2$ Basispuncte des ersten Büschels geht, das schon zur Erzeugung der Curve K' diente. Durch Drehung von L um o entsteht nun ein entsprechendes Curvenbüschel von Curven K''. Die beiden Büschel, die durch K' und K'' erzeugt werden, sind unter einander projectivisch, da jedes derselben dem Stralenbüschel, das durch die durch o gelegten Geraden L entsteht, projectivisch ist, und folglich erzeugen beide Büschel bezüglich von der $(m+m'-2)$-ten und $(m+m''-2)$-ten Ordnung nach Nr. 50. eine Curve der $(2m+m'+m''-4)$-ten Ordnung. Nun haben aber immer je zwei correspondierende Curven K' und K'' $(m-1)^2$ Puncte gemein, die in einer festen Curve der $(m-1)$-ten Ordnung liegen, nämlich auf der ersten Polare des Punctes o in Bezug auf C. Die übrigen

$$(m+m'-2)(m+m''-2)-(m-1)^2$$
$$=mm'+m'm''+m''m-2(m+m'+m'')+3$$

gemeinschaftlichen Puncte der homologen Curven K' und K'' erzeugen also nach Nr. 50 *a*. eine Curve von der Ordnung

$$2m+m'+m''-4-(m-1)^2 = m+m'+m''-3.$$

Diese ist offenbar der gesuchte Ort.

Diese Curve nennen wir im Folgenden *die Curve von Jacobi* für die drei gegebenen Curven*).

Gehen die drei Curven durch denselben Punct a, so gehen die geraden Polaren dieses Punctes alle durch denselben; haben also drei Curven C, C', C'' allen dreien gemeinschaftliche Puncte, so sind diese auch Puncte ihrer Curve von *Jacobi*.

Hat eine der drei Curven, z. B. C'', einen Doppelpunct d, so ist nach Nr. 72. die gerade Polare dieses Punctes in Bezug auf C'' unbestimmt, man kann dann also für sie die Gerade annehmen, welche d mit dem Durchschnittspunct der beiden geraden Polaren dieses Punctes in Bezug auf die beiden übrigen Curven C und C' verbindet. Daraus folgt dann, dasz die *Jacobische* Curve durch die Doppelpuncte der drei gegebenen Curven geht.

94. Specielle Fälle der Jacobischen Curve. Nehmen wir $m' = m''$, das heiszt also zwei der gegebenen Curven von derselben Ordnung an, so ändert sich die Curve von *Jacobi* in diesem Falle nicht, wenn man an die Stelle der obigen Curven andere Curven des Büschels setzt, das sie zusammen bestimmen. Dies ist augenblicklich klar, da die *Jacobische* Curve der Ort der Puncte ist, durch welche drei erste Polaren für denselben Pol gehen, und da nach Nr. 84*a*. die ersten Polaren eines und desselben Poles in Bezug auf alle Curven eines Büschels ein neues Büschel bilden, und folglich alle durch dieselben Puncte gehen.

In diesem Falle kann man die *Jacobische* Curve noch auf eine zweite Art definieren. Ist nämlich p ein Punct derselben, so gehen die drei ersten Polaren dieses Punctes in Bezug auf die drei gegebenen Curven durch denselben Punct p'; p' ist aber der Punct, durch welchen nach Nr. 84*c*. alle geraden Polaren von p in Bezug auf *alle* Curven des Büschels $(C'C'')$ gehen, folglich ist die gerade Polare von p in Bezug auf C

*) *Sylvester*, *a. a. O.*, p. 546.

auch die gerade Polare desselben Punctes in Bezug auf eine Curve des eben erwähnten Büschels. Man kann daher sagen: die Curve von **Jacobi** für die drei gegebenen Curven ist der Ort eines Punctes, der in Bezug auf C und in Bezug auf irgend eine der Curven des Büschels $(C'C'')$ dieselbe gerade Polare hat. Diesen Ort haben wir aber schon oben in Nr. 87. bestimmt.

95. **Die Curve von Hesse für ein geometrisches Netz.** Es sei jetzt $m = m' = m''$, das heiszt, es seien alle drei Curven von der nämlichen Ordnung. Zwei beliebigen von ihnen können wir nach Nr. 94. zwei andere Curven des von ihnen erzeugten Büschels substituieren, das heiszt, wir können für alle drei Curven drei beliebige Curven des von ihnen nach Nr. 92. bestimmten Netzes substituieren, wenn dieselben nur nicht ein und demselben Curvenbüschel angehören, ohne dasz die entsprechende Curve von **Jacobi** sich im Geringsten ändert. Das gibt in Verbindung mit Nr. 93. den Satz:

Lehrsatz II. *Der Ort der Pole, deren gerade Polaren in Bezug auf die Curven eines Netzes der m-ten Ordnung sämmtlich durch denselben Punct gehen, ist eine Curve der* $3(m-1)$*-ten Ordnung und geht durch sämmtliche Doppelpuncte der Curven des Netzes.*

In unserem Falle ist daher nach Nr. 92. die ***Jacobische*** Curve mit der von ***Hesse*** für das Netz identisch, daraus haben wir also eine neue Definition der Curve von ***Hesse*** für ein geometrisches Netz.

Wir wollen im Folgenden noch die beiden Fälle etwas näher untersuchen, dasz *erstens* die Curven des Netzes sich sämmtlich in einem Puncte schneiden, und dasz sie *zweitens* sich in diesem Puncte sämmtlich berühren. Im ersten Falle ist es erlaubt, als eine der drei Curven, welche das Netz bestimmen, diejenige zu wählen, für welche nach Nr. 92*a*. der gegebene Punct ein Doppelpunct ist, und im zweiten diejenige Curve, für welche nach Nr. 92*b*. der gegebene Punct eine Spitze bildet, und die gemeinschaftliche Tangente aller Curven die Rückkehrtangente ist.

96. **Netz, dessen einzelne Curven durch densel-**

ben Punct gehen. Es seien also zuerst drei Curven C, C', C'' von derselben Ordnung m gegeben. Sie haben einen Punct gemein, und derselbe sei für C'' ein Doppelpunct. In ihn verlegen wir den Pol o, von dem wir in Nr. 93. bei der allgemeinen Untersuchung der Curve *Jacobis* Gebrauch machten.

a. Bestimmung der Curven K'. Die ersten Polaren des Punctes o in Bezug auf C und C' gehen durch diesen Punct selbst hindurch, folglich enthält nach Nr. 93. die Curve K' für jede Lage von L eben diesen Punct.

Die Curve K', welche einer bestimmten Lage von L entspricht, bleibt unverändert, wenn man für C und C' zwei beliebige andere Curven des durch sie bestimmten Büschels substituiert. Wir nehmen nun für C die Curve C^o, welche in o die Gerade L berührt. Dann enthalten alle erste Polaren der Puncte von L in Bezug auf C^o nach Nr. 70. den Punct o. Durch o geht aber auch die erste Polare von o in Bezug auf C'; es ist daher nach Nr. 51*a*. die Tangente der Curve K' in o diejenige Gerade, welche in diesem Puncte die erste Polare von o in Bezug auf C^o berührt, das heiszt die Gerade L. Gehen also die beiden Curven derselben Ordnung C und C' durch o, so geht auch K' durch o und berührt daselbst diejenige Gerade L, deren entsprechende Curve sie ist.

b. Bestimmung der Curve K''. Da o für C'' ein Doppelpunct ist, so gehen nach Nr. 74*c*. alle erste Polaren der Puncte von L in Bezug auf sie selbst als Grundcurve durch o und berühren in diesem Puncte ein und dieselbe Gerad L', den conjugierten harmonischen Stral von L in Bezug auf die beiden Tangenten des Doppelpunctes von C''.

Nach Nr. 93. wird die Curve K'' durch zwei projectivische Curvenbüschel erzeugt, das eine bestehend aus den ersten Polaren der Puncte von L in Bezug auf C'', das zweite auf gleiche Weise aus den ersten Polaren derselben Puncte in Bezug auf C. Die Curven des ersten Büschels haben in o dieselbe Tangente L', und der Curve des zweiten Büschels, welche durch o geht, das heiszt der ersten Polare von o in Bezug auf C, entspricht die erste Polare von o in Bezug auf C'', das heiszt diejenige Curve des ersten Büschels, für welche o ein

Doppelpunct ist. Nach Nr. 57*b*. hat folglich für jede beliebige Lage der Geraden L die durch die beiden Büschel erzeugte Curve K'' in o einen Doppelpunct. Auszerdem ist nach Nr. 57*d*. in beiden Fällen, mag L eine der Tangenten im Doppelpuncte von C'' sein, oder die Tangente von C im Puncte o, in welchem letztern Falle nach Nr. 52*a*. auch die Curven des zweiten Büschels sämmtlich durch o gehen, in beiden Fällen also ist L eine der beiden Tangenten von K'' im Doppelpuncte o.

Folglich hat die Curve K'', wenn C und C'' einen gemeinschaftlichen Punct o haben, der für C'' ein Doppelpunct ist, für jede beliebige Gerade L durch o in diesem Puncte einen Doppelpunct, und L ist jedesmal, sobald sie eine der beiden gegebenen Curven berührt, auch eine der beiden Tangenten von K'' im Doppelpuncte.

c. Bestimmung der durch K' und K'' erzeugten Curve. Wir haben somit gefunden, dasz in unserem Falle nach *a*. der Punct o allen Curven K' angehört, welche den Geraden L, die durch ihn gelegt werden können, entsprechen, und dasz er nach *b*. für alle Curven K'', die derselben Geraden entsprechen, ein Doppelpunct ist. Folglich ist nach Nr. 52. o für die nach Nr. 93. durch die beiden Curvenbüschel K' und K'' erzeugte Gesammtcurve der $4(m-1)$-ten Ordnung ein dreifacher Punct. Ein Teil dieser Gesammtcurve ist aber die erste Polare von o nach C, und da diese einmal durch o geht, so ist dieser Punct für die übrigbleibende Curve der $3(m-1)$-ten Ordnung, das heiszt für die *Jacobische* Curve, ein Doppelpunct.

Die Gerade L ist nach *a*. Tangente ihrer entsprechenden K', also sind nach Nr. 52. die Tangenten der resultierenden Curve der $4(m-1)$-ten Ordnung im dreifachen Puncte o diejenigen der Geraden L, welche *auch* ihre entsprechenden Curven K'' berühren. L berührt nun nach *b*. die K'', wenn sie Tangente von C oder von C'' ist; es sind also die drei Tangenten des dreifachen Punctes die Tangente von C und die beiden Tangenten von C''. Von diesen ist die erste nach Nr. 71. die Tangente der ersten Polare von o in Bezug auf C, folglich sind die beiden übrigen die Tangenten der Curve von *Jacobi* im Puncte o.

d. Schluszfolgerung. Aus Allem folgern wir nun den Satz:

Lehrsatz III. *Gehen die Curven eines Netzes sämmtlich durch denselben Punct o, so besitzt die Curve von Hesse für das Netz in o einen Doppelpunct und hat in demselben mit derjenigen Curve des Netzes die Tangenten gemein, für welche o ebenfalls ein Doppelpunct ist.*

97. Netz, deszen einzelne Curven sich in demselben Puncte berühren. Wir gehen zur Untersuchung des Falles über, dasz der Punct *o* allen drei Curven *C*, *C'*, *C''* gemeinschaftlich ist, und für die letzte derselben eine Spitze bildet, und dasz die Rückkehrtangente in *o* auch *C* und *C'* berührt.

a. Die Curven *K'*. Da die Curven *C* und *C'* in *o* dieselbe Tangente haben, so können wir einer derselben die Curve des Büschels (*CC'*) substituieren, welche nach Nr. 47. in *o* einen Doppelpunct hat. Dieser Punct ist dann für *K'* nach Nr. 96 *b*. ein Doppelpunct, welche Lage auch *L* haben mag. Fällt aber *L* mit der Tangente *T* zusammen, so ist sie jedesmal eine der beiden Tangenten im Doppelpuncte der entsprechenden Curven *K'*.

b. Die Curven *K''*. Für *C''* ist *o* ein Rückkehrpunct. Alle erste Polaren der Puncte von *L* in Bezug auf diese Curve gehen also nach Nr. 74 *a*. durch *o* und berühren in diesem Puncte die Rückkehrtangente *T*. Unter ihnen ist aber eine, diejenige nämlich, welche dem Puncte *o* selbst entspricht, für welche dieser Punct eine Spitze ist, und *T* die Rückkehrtangente. Auszerdem geht die erste Polare von *o* für *C* als Fundamentalcurve auch durch *o* und berührt in diesem Puncte *T*. Es hat daher für jede beliebige *L* die Curve *K''* in *o* eine Spitze mit der Rückkehrtangente *T*.

Fällt aber *L* mit *T* zusammen, so haben nach Nr. 78 *a*. die ersten Polaren der Puncte von *L* in Bezug auf *C''* in *o* einen Doppelpunct, und auszerdem gehen auch nach Nr. 70. die ersten Polaren von *o* in Bezug auf *C* einfach durch *o*. Diejenige Curve *K''* also, welche der mit *T* zusammenfallenden *L* entspricht, hat in *o* nach Nr. 52. einen dreifachen Punct.

c. Die durch *K'* und *K''* erzeugte Curve. Es ist nach Alledem vollständig klar, dasz sämmtliche Curven *K'* in

o einen Doppelpunct haben, während auszerdem die Curven K'' daselbst eine Spitze mit der gemeinschaftlichen Rückkehrtangente T besitzen. Daraus folgt nach Nr. 52., dasz o für die Gesammtcurve der $4(m-1)$-ten Ordnung, welche durch die beiden Curvenbüschel der K' und K'' erzeugt wird, ein vierfacher Punct ist, und dasz zwei der vier Zweige daselbst von T berührt werden. Die beiden andern Zweige werden in o nach Nr. 52*a.* von der Tangente derjenigen Curve K' berührt, welcher eine Curve K'' entspricht, für die o ein dreifacher Punct ist. Nun entspricht die Curve K'', für welche o ein dreifacher Punct ist, nach *b.* der Lage von L, in welcher diese mit T zusammenfällt, sie entspricht also nach *a.* genau der Curve K' deren einer Zweig in o von der Geraden T berührt wird; drei der vier Tangenten im vierfachen Puncte o der Gesammtcurve der $4(m-1)$-ten Ordnung fallen also mit T zusammen.

Die Curve der $4(m-1)$-ten Ordnung ist nun zusammengesetzt aus der Curve von *Jacobi* der drei gegebenen Curven und aus der ersten Polare von o in Bezug auf C. Diese erste Polare geht einmal durch o und berührt daselbst T; die Curve von *Jacobi* geht daher dreimal durch o, und zwei ihrer Zweige berühren in diesem Puncte die Gerade T.

d. Schluszfolgerung. Aus Allem folgert sich der Satz:

Lehrsatz IV. *Die Curve von Hesse eines Curvennetzes, dessen Curven einen gemeinschaftlichen Punct o, und in demselben eine gemeinschaftliche Tangente T haben, hat drei Zweige, die durch o gehen, und von denen zwei in diesem Puncte von der Geraden T berührt werden.*

98. Ort der Puncte, in denen sich drei gerade Polaren dreier Curven für ein und denselben Pol schneiden. Es seien wieder drei Curven, C, C', C'' gegeben, deren Ordnungszahlen bezüglich m, m', m'' seien. Wir wollen die Ordnung des Ortes der Puncte bestimmen, in welchen sich je drei gerade Polaren desselben Poles für die drei gegebenen Curven schneiden.

Ist L eine beliebige Gerade, i ein Punct derselben, und sollen durch i die geraden Polaren von C und C' hindurch-

gehen, so musz der Pol o einer der $(m-1)(m'-1)$ Durchschnittspuncte der ersten Polaren von i für diese beiden Curven sein. Soll nun durch i auch die erste Polare für C'' als Grundcurve gehen, so liegt ihr Pol auf der geraden Polare von o in Bezug auf dieselbe Curve. Die geraden Polaren der $(m-1)(m'-1)$ Puncte o werden nun L in eben sovielen Puncten i' schneiden.

Es sei jetzt umgekehrt i' ein beliebiger Punct von L. Soll durch ihn die gerade Polare für C'' hindurchgehen, so musz der Pol auf der ersten Polare von i' in Bezug auf dieselbe Curve liegen. Diese erste Polare ist bekanntlich eine Curve K der $(m''-1)$-ten Ordnung. Die geraden Polaren der Puncte von K in Bezug auf C werden nun nach Nr. 81. von einer Curve der $(m-1)(m''-1)$-ten Classe umhüllt; ebenso die geraden Polaren der Puncte derselben Curve K in Bezug auf C' von einer zweiten Curve der $(m'-1)(m''-1)$-ten Classe. Jeder Tangente der einen Curve entspricht eine solche der andern, wenn man nur diejenigen Tangenten als entsprechende wählt, welche Polaren eines und desselben Punctes von K für die beiden Curven C und C' sind. Nach Nr. 83 *a*. bilden daher die Durchschnittspuncte der homologen Tangenten eine Curve der $[(m-1)(m''-1)+(m'-1)(m''-1)]$-ten Ordnung, welche natürlich die Gerade L in eben sovielen Puncten i schneidet.

Jedem Puncte i entsprechen daher $(m-1)(m'-1)$ Puncte i', jedem Puncte i' auszerdem $(m-1)(m''-1)+(m'-1)(m''-1)$ Puncte i, es müszen daher in L

$$(m-1)(m'-1)+(m'-1)(m''-1)+(m''-1)(m-1)$$

homologe Puncte i und i' zusammenfallen, und diese Zahl ist die gesuchte Ordnung des betrachteten Ortes. Diese Curve geht offenbar, wenn die drei Curven gemeinschaftliche Puncte besitzen, durch diese.

a. Die Steinersche Curve für ein Netz. Sind die drei Curven von derselben Ordnung m, so kann man für sie drei beliebige Curven des Netzes, das durch sie bestimmt wird, substituieren, ohne dasz sich der oben betrachtete Ort im Geringsten verändert. In diesem Falle nennen wir denselben, der dann von der $3(m-1)^2$-ten Ordnung ist, der Nr. 88 *d*. analog, ***die Curve von Steiner für das Netz***.

b. **Einhüllende der Verbindungsgeraden entsprechender Puncte der Curven von Steiner und Hesse.** Jeder Punct p der Curve von *Hesse* eines gegebenen Netzes der m-ten Ordnung ist der Pol von unendlich vielen geraden Polaren in Bezug auf die Curven des Netzes. Diese Geraden schneiden sich nach Nr. 95. alle in einem Puncte o der Curve von *Steiner*. Es entspricht daher jedem Puncte der Curve von *Hesse* ein Punct der Curve von *Steiner*, und umgekehrt. Die Geraden, welche diese entsprechenden Puncte verbinden, werden daher nach Nr. 83*b*. von einer dritten Curve der Classe

$$3(m-1)+3(m-1)^2=3m(m-1)$$

umhüllt. Nun ist jede Gerade durch o eine Polare von p in Bezug auf eine Curve des Netzes; geht aber die gerade Polare durch den Pol, so liegt dieser auf der Fundamentalcurve selbst, und diese berührt in ihm die gerade Polare. Daraus folgt, dasz die Gerade op in p eine Curve des Netzes berührt; alle Curven des Netzes aber, die durch p gehen, berühren sich in ihm nach Nr. 92., und ihre gemeinschaftliche Tangente ist daher op.

§. 16.

Die Formeln von Plücker.

99. **Formel für die Classe und die Ordnung einer Curve.** Wir bezeichnen im Folgenden durch:

n die Ordnung,
m die Classe,
δ die Zahl der Doppelpuncte,
$\varkappa$ die Zahl der Rückkehrpuncte oder Spitzen,
τ die Zahl der Doppeltangenten,
ι die Zahl der Wendepuncte oder Wendetangenten

einer beliebigen Fundamentalcurve C_n.

Nun ist bekanntlich m die Zahl der Tangenten, welche von einem beliebigen Puncte an die gegebene Curve gelegt werden können, es ist daher nach den Sätzen in Nr. 74*c*. oder in Nr. 87*d*.:

(1) $$m = n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa,$$

eine Formel, welche die Classe einer Curve liefert, wenn die Ordnung und die Anzahl der Doppelpuncte und Spitzen bekannt ist.

Nach dem Dualitätsprincip (m. s. Nr. 82.), musz die Ordnung einer Curve aus einer Gleichung derselben Form erhalten werden, wenn man die Classe, die Zahl der Doppeltangenten und der Wendepuncte kennt, das heiszt, es ist:

(2) $$n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota.$$

100. Formeln für die Doppeltangenten und Wendepuncte. Da jeder Punct der Grundcurve, deszen conische Polare das System zweier Geraden bildet, nach Nr. 80. ein Wendepunct oder ein Doppelpunct ist, so schneidet die Curve von *Hesse*, die nach Nr. 90*a*. der Ort der Puncte ist, deren conische Polaren aus dem System zweier Geraden bestehen, die gegebene Curve in den Wendepuncten und in den vielfachen Puncten. Da nun die Curve von *Hesse* von der Ordnung $3(n-2)$ ist, so ist die Zahl der Wendepuncte einer Curve, vorausgesetzt, sie habe keine vielfachen Puncte, gleich $3n(n-2)$ *).

Es sei nun d ein Doppelpunct von C_n, dann gehen alle erste Polaren durch d und die Curve von *Hesse* des durch sie gebildeten Netzes, welche auch die *Hessesche* Curve der Curve C_n ist, (m. s. Nr. 90*a*. und Nr. 92.), geht zweimal durch d und hat hier nach Nr. 96*d*. die beiden Tangenten mit der ersten Polare dieses Punctes selbst gemein, das heiszt nach Nr. 72., dieselben Tangenten wie die gegebene Curve. Der Punct d gilt also nach Nr. 32. für *sechs* Durchschnittspuncte der Curve von *Hesse* mit C_n. Durch jeden Doppelpunct verliert also die Curve *sechs* Wendepuncte.

Es sei ferner d eine Spitze von C_n und T die Rückkehrtangente. In diesem Falle gehen alle erste Polaren von C_n nach Nr. 74*c*. durch d und berühren in ihm die Gerade T. Die *Hessesche* Curve dagegen hat nach Nr. 97*d*. drei Zweige, die

*) *Plücker*, *System der analytischen Geometrie*, Berlin, Dunker und Humblot, 1835. S. 264. — *Hesse*, *Ueber die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung*. (*Crelles* Journal T. 28. Berlin, Reimer, 1844. S. 104).

durch d gehen, und von denen zwei T berühren und zwar in d. Daher gilt d für *acht* Durchschnittspuncte von C_n mit der Curve von *Hesse*. Durch jede Spitze gehen also der Curve acht Wendepuncte verloren*).

Hat daher C_n δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen, so ist die Zahl der Wendepuncte durch die Formel gegeben:

$$(3) \qquad \iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\varkappa.$$

Nach dem Princip der Dualität hat daher eine Curve m-ter Classe mit τ Doppeltangenten und ι Wendetangenten

$$(4) \qquad \varkappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota$$

Rückkehrpuncte.

Die so gefundenen vier Gleichungen gelten aber, da sie nicht von einander unabhängig sind, nur für drei. Es ist nämlich, wenn man Gleichung (1) mit drei multipliciert und von Gleichung (3) subtrahiert,

$$(5) \qquad \varkappa - \iota = 3(n-m),$$

und diese Gleichung läszt sich auch ebenso aus den Gleichungen (2) und (4) herleiten.

Zwischen den sechs Gröszen n, m, δ, $\varkappa$, τ, ι existieren also drei unabhängige Gleichungen, so dasz man daher, wenn von ihnen drei gegeben sind, die übrigen bestimmen kann. So ergibt sich z. B., wenn n, δ, $\varkappa$ gegeben sind, der Werth von τ, indem man m und ι aus den Gleichungen (1), (2) und (3) eliminiert. Man erhält dann:

$$(6) \qquad \begin{cases} \tau = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2\delta+3\varkappa)(n^2-n-6) \\ \qquad + 2\delta(\delta-1) + \frac{9}{2}\varkappa(\varkappa-1) + 6\delta.\varkappa. \end{cases}$$

Eine sehr brauchbare Formel erhält man noch durch Subtraction der Gleichungen (2) und (1) und nachherige Elimination von $\varkappa - \iota$ mittelst (5). Dies gibt nämlich:

$$(7) \qquad 2(\delta - \tau) = (n-m)(n+m-9).$$

*) *Cayley*, *Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes.* (*Crelles* Journal, T. 34. Berlin, Reimer, 1847. S. 43).

Die obigen wichtigen Relationen zwischen der Ordnung, der Classe und den Singularitäten einer ebenen Curven sind von ***Plücker*** entdeckt*).

101. **Weitere Relationen zwischen der Ordnung, der Classe und den Singularitäten einer Curve.** Soll eine Curve einen Doppelpunct haben, ohne dasz dieser gegeben ist, so gilt das für *eine* Bedingung. Zu diesem Zwecke genügt es nämlich, dasz drei erste Polaren, die nicht zu demselben Büschel gehören, einen gemeinschaftlichen Punct haben. Soll aber die Curve einen Stillstandspunct haben, ohne dasz derselbe gegeben ist, das heiszt also, sollen drei erste Polaren, die nicht zu demselben Büschel gehören, sich in einem Puncte berühren, so ist das soviel als *zwei* Bedingungen. Hat daher eine Curve n-ter Ordnung δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen, so ist sie nach Nr. 34. durch $\frac{1}{2}n(n+3)-\delta-2\varkappa$ Bedingungen bestimmt. Dem Princip der Dualität nach bestimmen folglich eine Curve der m-ten Classe, die τ Doppeltangenten und ι Wendetangenten besitzen soll, $\frac{1}{2}m(m+3)-\tau-2\iota$ Bedingungen.

Laszen wir nun die Zahlen n, m, δ, $\varkappa$, τ, ι sich auf dieselbe Curve beziehen, so musz die Gleichung bestehen:

$$(8) \qquad \tfrac{1}{2}n(n+3)-\delta-2\varkappa=\tfrac{1}{2}m(m+3)-\tau-2\iota.$$

Diese Formel, die sich auch aus den Formeln (1)—(7) ableiten liesze, kann aber auch, wenn sie wie hier *a priori* abgeleitet wird, dazu dienen, um mit zwei beliebigen der Gleichungen (1)—(7) zusammen, die sämmtlichen andern aufzustellen**).

102. **Charakteristik einer Curve einer beliebigen Ordnung ohne vielfache Puncte.** Wir werden, von hier unsern Ausgang nehmend, im Folgenden die Eigenschaften einer Curve n-ter Ordnung untersuchen, die wir in genügender Allgemeinheit unter allen derselben Ordnung in der Art auswählen, dasz dieselbe, so lange wir keine andern Bestimmungen treffen, von der $n(n-1)$-ten Classe sei, keinen vielfachen Punct be-

*) *Theorie der algebraischen Curven*, S. 211.

**) *Salmon*, *Higher plane curves*, p. 92.

sitze, dagegen $3n(n-2)$ Wendepuncte und $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten.

Die ersten Polaren dieser Curve bilden ein Netz der $(n-1)$-ten Ordnung, die *Hessesche* Curve dieses Netzes berührt C_n in ihren $3n(n-2)$ Wendepuncten; die Curve von *Steiner* für das Netz (Nr. 98*a.*), die nach Nr. 88*d.* auch die *Steinersche* Curve von C_n ist, hat die Ordnungszahl $3(n-2)^2$.

§. 17.

Die Curve, welche eine Polare erzeugt, wenn sich der Pol nach bestimmtem Gesetze bewegt.

103. Ordnung und Singularitäten der Einhüllenden der geraden Polaren der Puncte einer gegebenen Curve. Wenn ein Punct, als Pol in Bezug auf die Fundamentalcurve C_n aufgefaszt, sich auf einer zweiten Curve C_m der m-ten Ordnung bewegt, so werden die geraden Polaren von einer Curve K umhüllt, von der wir schon in Nr. 81. fanden, dasz sie von der $m(n-1)$-ten Classe sei. Die Tangenten, welche von einem beliebigen Puncte o sich an die Curve K legen laszen, sind die geraden Polaren der $m(n-1)$ Puncte, in denen C_m von der ersten Polare von o in Bezug auf C_n geschnitten wird.

a. Ordnung und Singularitäten der Curve K. Ist o so gewählt, dasz seine erste Polare Tangente von C_m wird, so fallen zwei der geraden Polaren durch o in eine zusammen, und es ist also o nach Nr. 30. ein Punct der Curve K, die sich daher als Ort der Pole auffaszen läszt, deren erste Polaren C_m berühren. Diese Eigenschaft gibt das Mittel, die Ordnung von K zu finden, das heiszt, die Zahl der Durchschnittspuncte einer beliebigen Geraden L mit K. Die ersten Polaren der Puncte von L bilden nämlich nach Nr. 77. ein Curvenbüschel, und es sind also nach Nr. 87*c*, sobald wir annehmen, C_m habe δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen, in L $m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa)$ Puncte, deren erste Polaren C_m berühren, das heiszt, die Ordnungszahl von K ist gleich

$$m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa).$$

Es ist augenblicklich klar, dasz die Wendetangenten von K die geraden Polaren der Rückkehrpuncte von C_m sind. K hat daher $\varkappa$ Wendepuncte.

Da wir jetzt die Classe, die Ordnung und die Zahl der Wendepuncte von K kennen, so finden wir mittelst der in den Nrn. 99. und 100. entwickelten Formeln von *Plücker*, dasz dieselbe auszerdem

$$\tfrac{1}{2}\{m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa)\}^2-m(5m+6n-21)+10\delta+\tfrac{9}{2}\varkappa$$

Doppelpuncte,

$$3m(m+n-4)-(6\delta+8\varkappa)$$

Spitzen und

$$\tfrac{1}{2}m(n-2)(mn-3)+\delta$$

Doppeltangenten besitzt.

b. **Uebertragung des Gefundenen auf ein Curvennetz.** Nun ist es klar, dasz jeder Doppelpunct von K der Pol einer ersten Polare ist, welche C_m in zwei verschiedenen Puncten berührt; dasz ferner ebenso jede Spitze von K eine erste Polare hat, welche mit C_m eine dreipunctige Berührung eingeht, und dasz jede Doppeltangente von K, als gerade Polare betrachtet, entweder zwei verschiedene Pole auf C_m hat, oder zwei in einen Doppelpunct von C_m vereinigte Pole.

Da nun die Eigenschaften des Systems der ersten Polaren in Bezug auf C_n sich auf ein beliebiges Curvennetz ausdehnen laszen, so erhalten wir aus dem Vorhergehenden die Sätze:

Lehrsatz I. *Die Zahl der Curven eines Netzes der $(n-1)$-ten Ordnung, welche eine gegebene Curve m-ter Ordnung, die δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen besitzt, in zwei Puncten berühren, ist gleich:*

$$\tfrac{1}{2}\{m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa)\}^2-m(5m+6n-21)+10\delta-\tfrac{9}{2}\varkappa.$$

Lehrsatz II. *Die Zahl der Curven dieses Netzes aber, die mit der Curve m-ter Ordnung eine dreipunctige Berührung eingehen, ist gleich:*

$$3m(m+n-4)-(6\delta+8\varkappa)\ ^{*}).$$

---

*) *Bischoff*, *a. a. O.* S. 174—176.

c. **Zahl der Puncte einer Curve, deren erste Polaren die Curve selbst berühren.** Jeder Punct von K ist der Pol einer ersten Polare, die C_m berührt, so dasz, wenn man die Durchschnittspuncte von K und C_m betrachtet, sich der Satz ergibt:

> Lehrsatz III. *In einer Curve C_m der m-ten Ordnung mit δ Doppelpuncten und $\varkappa$ Spitzen gibt es $m^2(m+2n-5)-m(2\delta-3\varkappa)$ Puncte, deren erste Polaren in Bezug auf C_n die Curve C_m berühren.*

Ist $m=1$, so entsteht hieraus:

> Lehrsatz IV. *In einer beliebigen Geraden gibt es $2(n-2)$ Puncte, deren erste Polaren in Bezug auf die Fundamentalcurve C_n die gegebene Gerade selbst berühren.*

Ist die Gerade eine Tangente von C_n, so fallen zwei dieser $2(n-2)$ Pole mit dem Berührungspuncte zusammen, es gibt folglich in einer Tangente von C_n noch $2(n-3)$ Puncte, für welche die erste Polaren nach C_n die Tangente selbst berühren.

d. **Die Curve C_m und C_n sind dieselben.** Fällt in obiger Untersuchung die Curve C_m mit C_n zusammen, so besteht die Curve K offenbar aus C_n selbst und aus deren Wendetangenten, so dasz ein jeder Punct der Curve und der Tangenten nach Nr. 71. und Nr. 80. ein Pol einer ersten Polare ist, welche die Fundamentalcurve berührt. In diesem Falle sind die Doppelpuncte von K die Durchschnittspuncte der Wendetangenten mit der Curve C_n; die Spitzen von K werden durch die Wendepuncte von C_n, jeden zweimal gezählt, dargestellt und die Doppeltangenten von K sind die Doppel- und Wendetangenten von C_n.

Die Doppelpuncte von K sind nach *b.* die Pole von eben sovielen ersten Polaren, welche die Grundcurve zweimal berühren. Ins Besondere berührt nach Nr. 80., wenn o ein Durchschnittspunct zweier Wendetangenten derselben ist, die erste Polare von o die Curve C_n in den beiden entsprechenden Wendepuncten, und ist o der Durchschnittspunct von C_n und einer Wendetangente, so berührt die erste Polare von o nach Nr. 71. C_n in o und nach Nr. 80. im Berührungspuncte der Tangente. Es gibt daher $3n(n-2)(n-3)$ erste Polaren, welche C_n zweimal berühren, und deren Pole auf C_n selbst liegen, und

$\frac{1}{2}n(n-2)\{3n(n-2)-1\}$ erste Polaren, die ebenfalls zweimal C_n berühren, deren Pole aber auszerhalb C_n liegen.

e. Die $(n-1)$-te Polare von C_m. Die Curve K, das heiszt die Einhüllende der $(n-1)$-ten Polaren der Puncte von C_m, heiszt die *$(n-1)$-te Polare von C_m* *).

Setzen wir $m=1$, so ergibt sich, dasz die $(n-1)$-te Polare einer Geraden R, das heiszt die Einhüllende der geraden Polaren der Puncte von R, oder auch der Ort der Pole der ersten Polaren, die R berühren, eine Curve der $(n-1)$-ten Classe und der $2(n-2)$-ten Ordnung ist mit $3(n-3)$ Spitzen, $2(n-3)(n-4)$ Doppelpuncten und $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Doppeltangenten. Das gibt den Satz:

Lehrsatz V. *Es gibt in Bezug auf eine gegebene Grundcurve immer $3(n-2)$ erste Polaren, für welche eine gegebene Gerade R eine Wendetangente, $2(n-3)(n-4)$ erste Polaren, für welche R eine Doppeltangente ist, und ausserdem $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Gerade, deren jede zwei Pole auf R hat.*

f. Doppelte Definition der ersten Polare eines Punctes. Geht die $(n-1)$-te Polare der Geraden R durch einen gegebenen Punct o, so ist dieser der Pol einer ersten Polare, welche nach *b.* R berührt. Folglich wird, wenn die $(n-1)$-te Polare sich ändert, indem sie sich um den festen Punct o dreht, die Gerade R von der ersten Polare von o umhüllt. Wir haben somit zwei Definitionen der ersten Polare eines Punctes:

Lehrsatz VI. *Die erste Polare eines Punctes o ist der Ort der Pole, deren $(n-1)$-te Polaren sich in o schneiden, und auch die Einhüllende der Geraden, deren $(n-1)$-te Polaren durch o gehen.*

104. Einhüllende der Polaren derselben Ordnung der Puncte einer gegebenen Curve. Es bewege sich ein Pol p auf einer Curve C_m der m-ten Ordnung, die δ Doppel-

*) Es ist also für das Folgende sehr wol zwischen Polare eines Punctes und Polare einer Curve zu unterscheiden.

puncte und $\varkappa$ Spitzen hat. Von welchem Index ist dann die *Reihe* (deren Definition wir in Nr. 34. gaben), welche durch die r-ten Polaren von p in Bezug auf die Fundamentalcurve C_n gebildet wird, und von welcher Beschaffenheit ist ihre Einhüllende?

a. Index der Reihe der r-ten Polaren. Geht die r-te Polare von p durch den Punct o, so liegt nach Nr. 69 *a.* der Pol auf der $(n-r)$-ten Polare von o, das heiszt, er ist einer der $r.m$ Durchschnittspuncte dieser Polaren mit der gegebenen Curve C_m. Durch o gehen also $r.m$ r-te Polaren von Puncten, die auf C_m liegen, das heiszt, die r-ten Polaren der Puncte von C_m bilden eine Reihe vom Index $r.m$.

b. Die $(n-r)$-te Polare berührt C_m. Berührt die $(n-r)$-te Polare von o die Curve C_m in einem Puncte, so fallen in o zwei r-te Polaren zusammen, und o ist ein Punct der Einhüllenden der Curven der oben gegebenen Reihe. Daraus flieszt der Satz:

Lehrsatz VII. *Die Einhüllende der r-ten Polaren der Puncte einer Curve C_m ist gleichzeitig der Ort der Pole der $(n-r)$-ten Polaren, welche die Curve C_m berühren.*

c. Ordnungszahl der Einhüllenden der r-ten Polaren; r-te Polare einer Curve. Welches ist die Ordnung dieses Ortes? oder wieviel Puncte liegen auf einer beliebigen Transversale L, deren $(n-r)$-te Polaren eine gegebene Curve C_m berühren?

Die $(n-r)$-ten Polaren der Puncte der Geraden L bilden nach *a.* eine Reihe der r-ten Ordnung vom Index $(n-r)$. Nach Nr. 87 *c.* berühren daher $(n-r)\{m(m+2r-3)-(2\delta+3\varkappa)\}$ von ihnen die Curve C_m. Dies gibt den Satz:

Lehrsatz VIII. *Die Einhüllende der r-ten Polaren der Puncte einer Curve der m-ten Ordnung mit δ Doppelpuncten und $\varkappa$ Spitzen ist eine Curve der Ordnung*

$$(n-r)\{m(m+2r-3)-(2\delta+3\varkappa)\}.$$

Diese Curve nennt man die *r-te Polare* der gegebenen Curve C_m in Bezug auf die gegebene Fundamentalcurve C_n *).

*) *Steiner, a. a. O.* S. 2—3. Man beachte auch die letzte Anmerkung.

d. **Die erste Polare einer Curve von bestimmter Classe.** Setzt man $r = 1$ und bezeichnet die Classe der Curve C_m durch m', das heiszt, setzt man

$$m' = m(m-1) - (2\delta + 3\varkappa),$$

so hat man nach Nr. 99. den Satz:

Lehrsatz IX. *Die erste Polare einer Curve der m'-ten Classe, das heiszt der Ort der Pole der Geraden, welche sie berühren, ist eine Curve der $m'(n-1)$-ten Ordnung.*

Diese Curve enthält die Puncte, in welchen die Fundamentalcurve von den Tangenten berührt wird, welche sie mit der Curve der m'-ten Classe gemein hat.

Für $m' = 1$ kommen wir auf die in Nr. 103*f.* gegebene Definition der ersten Polaren eines Punctes zurück.

e. **r-te Polaren einer Geraden.** Setzen wir $m = 1$, so entsteht:

Lehrsatz X. *Die r-te Polare einer Geraden ist eine Curve der $2(r-1)(n-r)$-ten Ordnung. Die erste Polare einer Geraden ist also von der nullten Ordnung.*

Die letztere besteht nach Nr. 77. wirklich nur aus den $(n-1)^2$ Polen der gegebenen Geraden.

Für $r = n-1$ erhalten wir das schon oben in Nr. 103*e.* gefundene Resultat wieder.

f. **Methode, die Ordnung gewiszer Einhüllender zu bestimmen.** Die Ordnung der r-ten Polare einer Geraden R kann man auch direct auf folgende Weise bestimmen. Wir betrachten nämlich zu diesem Zwecke diese Curve als Ort der Durchschnittspuncte zweier unmittelbar folgender Curven der Reihe vom Index r und der $(n-r)$-ten Ordnung, welche nach Nr. 34. die r-ten Polaren der Puncte von R bestimmen.

Ist a ein beliebiger Punct von R, so liegen die Pole der r-ten Polaren, welche durch a gehen, auf der $(n-r)$-ten Poare von a, die R in r Puncten a' schneidet. Nehmen wir umgekehrt einen beliebigen Punct a' auf R, so schneidet seine r-te

Polare diese Gerade in $n-r$ Puncten a. Beziehen wir daher die Puncte a und a' auf denselben Anfang o, so besteht unter den Abschnitten oa' eine Gleichung des r-ten Grades, und unter den Abschnitten oa eine solche des $(n-r)$-ten Grades. Der Punct a liegt nun auf der gesuchten Curve, sobald zwei der r durch ihn gelegten r-ten Polaren zusammenfallen. Die Bedingungsgleichung, dasz die obenerwähnte Gleichung für oa' zwei gleiche Werte hat, ist aber für die Coefficienten vom Grade $2(r-1)$, und die für oa folglich vom Grade $2(r-1)(n-r)$. Die Gerade R hat also mit dem gesuchten Orte $2(r-1)(n-r)$ Puncte gemein und die Einhüllende der r-ten Polaren der Puncte einer Geraden ist daher eine Curve der $2(r-1)(n-r)$-ten Ordnung.

Dieselbe Betrachtung kann man in vielen Fällen zur Bestimmung der Ordnung einer Curve, welche die Curven einer Reihe einhüllt, anwenden. Ist z. B. die Reihe von der r-ten Ordnung und vom Index s, und man kann eine Punctreihe construieren, welche ihr projectivisch ist, derart, dasz zwischen den Curven der Reihe und den Puncten der Geraden eine Beziehung besteht, nach der jeder Curve nur ein Punct der Geraden entspricht und umgekehrt, so ist die Einhüllende von der $2(r-1)s$-ten Ordnung. Für $s=1$ entsteht so der Satz:

Lehrsatz XI. *Entspricht der Reihe der Tangenten einer Curve der r-ten Classe eine projectivische Punctreihe, so ist die Ordnung der Curve einfach* $2(r-1)$.

g. Doppelte Definition der Polare eines Punctes. Geht die $(n-r)$-te Polare einer Geraden durch einen gegebenen Punct o, so ist dieser nach *b.* der Pol einer r-ten Polare, welche diese Polare berührt. Folglich gilt der Satz:

Lehrsatz XII. *Die r-te Polare eines Punctes o, oder auch der Ort der Puncte, deren $(n-r)$-te Polaren durch o gehen, ist auch die Einhüllende der Geraden, deren $(n-r)$-te Polaren den Punct o enthalten.*

Wir haben somit sowol die Polaren der Puncte, als die der Curven auf doppelte Weise definiert, sowol als Orte, als als Einhüllende, und gerade in dieser doppelten Definition scheint das Geheimnisz der so groszen Fruchtbarkeit der Theorie der Polaren zu liegen.

h. **Sätze über Polaren von Curven.** In o berühre die r-te Polare einer Curve C eine zweite Curve C'. Nun berührt diese Polare in o eine r-te Polare eines Punctes o' von C, und umgekehrt wird nach *b.* die Curve C in o' von der $(n-r)$-ten Polare von o berührt. Aber die r-te Polare von o' berührt in o auch C', so dasz endlich die $(n-r)$-te Polare von o in o' die $(n-r)$-te Polare von C' berühren wird. Das gibt den Satz:

> **Lehrsatz XIII.** *Berührt die r-te Polare einer Curve C eine zweite Curve C', so berührt umgekehrt die $(n-r)$-te Polare von C' die erste Curve C.*

i. **Sätze über Polaren von Curven. Fortsetzung.** Eine Gerade R sei die $(r-1)$-te Polare eines Punctes o in Bezug auf die $(n-r)$ te Polare eines andern Punctes o', oder, was dasselbe ist — m. s. Nr. 69*c.* —, die $(n-r)$-te Polare von o' in Bezug auf die $(r-1)$-te Polare von o. Laszen wir R sich bewegen, und von einer Curve C umhüllt werden, so ist der Ort des Punctes o, wenn wir o' als fest annehmen, nach *d.* die erste Polare von C in Bezug auf die $(n-r)$-te Polare von o'; bleibt umgekehrt o fest, während R die Curve C umhüllt, so ist der Ort von o' die erste Polare von C in Bezug auf die $(n-r)$-te Polare von o. Folglich gilt der Satz:

> **Lehrsatz XIV.** *Geht die erste Polare einer Curve C in Bezug auf die $(r-1)$-te Polare eines Punctes o durch o', so geht die erste Polare von C in Bezug auf die $(n-r)$-te Polare von o' durch o und umgekehrt.*

105. **Ort der verbundenen Pole eines beweglichen Poles.** Die $(n-1)$-te Polare einer Curve C_m der m-ten Ordnung ist nach Nr. 81. eine Curve K der $m(n-1)$-ten Classe. Dem entsprechend ist nach Nr. 104*d.* die ersten Polare von K eine Curve der $m(n-1)^2$-ten Ordnung. Diese Curve schlieszt auch die gegebene C_m mit in sich ein, und es ist folglich K nicht nur die Einhüllende der geraden Polaren von C_m, sondern auch nach Nr. 103*a.* der Ort der Pole der ersten Polaren, welche C_m berühren. Durchläuft also ein Punct o eine Curve C_m, so beschreiben die andern $(n-1)^2-1$ Pole der geraden

Polare von o eine Curve der $m(n-1)^2 - m = mn(n-2)$-ten Ordnung.

Zu diesem Resultate gelangen wir auch, bei der Lösung der Aufgabe: Wenn ein Punct o sich auf einer beliebigen Curve bewegt, welche Curve beschreiben dann die übrigen Pole der geraden Polare von o?

Wir nehmen zuerst als die gegebene Curve eine Gerade R an, und untersuchen, in wieviel Puncten dieselbe den gesuchten Ort schneidet. Nach Nr. 103*e*. gibt es $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Gerade, deren jede zwei Pole auf R hat, folglich sind die $(n-2)(n-3)$ Pole dieser Geraden ebenso viele Puncte des gesuchten Ortes. Bedenken wir nun noch, dasz nach Nr. 90*b*. in jedem Puncte der Curve von *Hesse* zwei Pole ein und derselben Geraden zusammenfallen, dasz also die $3(n-2)$ Durchschnittspuncte der Curve von *Hesse* mit R auch dem gesuchten Orte angehören, so übersehen wir augenblicklich, dasz der gesuchte Ort $(n-2)(n-3)+3(n-2)$ Puncte mit R gemein hat, das heiszt, derselbe ist von der $n(n-2)$-ten Ordnung.

Ist nun ferner statt der Geraden eine beliebige Curve C_m gegeben, so müszen wir untersuchen, wie oft *eine* Gerade einen Pol auf C_m und gleichzeitig einen solchen auf einer beliebigen Geraden R hat. Die verbundenen Pole der Puncte von R liegen nun aber, wie wir vor Kurzem nachgewiesen, alle auf einer Curve der $n(n-2)$-ten Ordnung, welche C_m in $m.n(n-2)$ Puncten schneidet. Es gibt also $m.n(n-2)$ Puncte auf C_m, deren jeder einen verbundenen Pol auf R hat, und daraus folgt:

> Lehrsatz XV. *Beschreibt ein Pol eine Curve m-ter Ordnung, so ist der Ort der ihm verbundenen Pole von der $m.n(n-2)$-ten Ordnung.*

106. **Ort der Durchschnittspuncte der ersten und zweiten Polare eines sich bewegenden Punctes.** Wir laszen sich einen Pol auf einer Curve C_m der m-ten Ordnung bewegen und untersuchen den Ort der Durchschnittspuncte der ersten und zweiten Polaren des beweglichen Poles in Bezug auf die Grundcurve C_n. Geht durch den Punct t einer Geraden R eine erste Polare, so liegt der Pol derselben auf der geraden

Polare von i, die natürlich C_m in m Puncten schneidet, deren zweite Polaren die Gerade R in $m(n-2)$ Puncten i' treffen.

Nimmt man umgekehrt einen beliebigen Punct i' von R, durch den eine zweite Polare von i gehen soll, so liegt der Pol derselben auf der conischen Polare von i' und diese berührt C_m in m Puncten. Die ersten Polaren dieser Puncte bestimmen nun auf R $2n(n-1)$ weitere Puncte i. Jedem Puncte i entsprechen demnach $m(n-2)$ Puncte i', und jedem Puncte i' ebenso $2m(n-1)$ Puncte i. Es gibt deshalb in R nach Nr. 88.

$$m(n-2)+2m(n-1)=m(3n-4)$$

Puncte i, von denen jeder mit dem entsprechenden Puncte i' zusammenfällt. *Der Ort ist folglich eine Curve U der $m(3n-4)$-ten Ordnung.* Offenbar berührt dieselbe C_n in den $n.m$ Durchschnittspuncten von C_m und C_n, so dasz also in diesen Puncten nach Nr. 71. die ersten und zweiten Polaren sich untereinander und die Curve C_n berühren.

Da auszerdem durch einen Wendepunct der Grundcurve nach Nr. 80. jede erste Polare eines beliebigen Punctes der betreffenden Wendetangente geht, so musz die Curve U so oft durch einen Wendepunct C_n gehen, als es gemeinschaftliche Puncte von C_n und der Wendetangente gibt. U geht deshalb m-mal durch jeden der $3n(n-2)$ Wendepuncte von C_n *).

a. Die Curve C_m fällt mit C_n zusammen. Fällt C_m mit C_n zusammen, so enthält U offenbar zweimal die Fundamentalcurve. Sehen wir von dieser ab, so bleibt eine Curve der $3n(n-2)$-ten Ordnung übrig, für welche die Wendepuncte von C_n $(n-2)$-fache Puncte sind. Durchläuft also ein Pol die Grundcurve, so erzeugen die $(n-1)(n-2)-2$ Puncte in denen sich die erste und zweite Polare schneiden, eine Curve der der $3n(n-2)$-ten Ordnung die $(n-2)$ Zweige hat, welche durch jeden Wendepunct von C_n gehen, und von denen einer mit C_n eine dreipunctige Berührung eingeht. Dies ist sogleich klar, wenn man beachtet, dasz jede Wendetangente der Grundcurve

*) Clebsch, *Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Puncte der Theorie der Polaren.* (Crelle-Borchard's Journal, T. 58. Berlin, Reimer, 1861, S. 279).

$n-2$ Puncte mit dieser gemein hat, nämlich den Wendepunct und $n-3$ einfache Durchschnittspuncte.

b. Ort der Durchschnittspuncte der r-ten und s-ten Polaren eines Punctes. Analog beweist man, dasz, wenn der Pol eine Curve C_m beschreibt, die Durchschnittspuncte der r-ten und s-ten Polaren eine Curve der $[m.n(r+s) - 2m.r.s]$-ten Ordnung erzeugen, welche die Grundcurve in den Durchschnittspuncten derselben mit C_m berührt. Es ist dabei bemerkenswerth, dasz die Zahl $m.n(r+s)-2m.r.s$ sich nicht ändert, wenn man $n-r$ und $n-s$ für r und s substituiert.

§. 18.

Anwendung auf Curven zweiter Ordnung.

107. Pol und Polare der Kegelschnitte. Nimmt man in den soeben auseinandergesetzten Theoremen $n=2$, so folgen sehr interessante Resultate für die Theorie der Kegelschnitte.

In der Ebene der Curve C_2 der zweiten Ordnung sei ein Pol o angenommen, dann ist nach Nr. 68. der Ort der conjugierten harmonischen Puncte von o in Bezug auf die Durchschnittspuncte der Curve mit einer durch o gelegten, um diesen Punct sich drehenden Geraden die *gerade Polare* von o. Geht die Polare von o durch einen zweiten Punct o', so geht nach Nr. 69*a*. umgekehrt die Polare von o' durch o. Alle Gerade, welche durch einen Punct o gehen, haben daher ihre Pole auf der geraden Polare von o, und es sind umgekehrt die Puncte einer beliebigen Geraden die Pole von Geraden, die sich im Pole der gegebenen Geraden schneiden.

Es hat also jeder Punct nur eine bestimmte gerade Polare und umgekehrt jede Gerade nur einen einzigen Pol. Daraus folgt:

> Lehrsatz I. *Die Puncte einer Geraden bilden eine projectivische Punctreihe des von ihren respectiven Polaren gebildeten Stralenbüschels;*

und hieraus weiter:

Lehrsatz II. *Das Doppelverhältniss von vier Geraden die sich in einem Puncte schneiden, ist gleich dem Doppelverhältniss der vier Pole dieser Geraden*).*

Nach Nr. 70. schneidet die Polare eines Punctes *o* den Fundamentalkegelschnitt in den Puncten, in welchen dieser von Geraden die durch *o* gehen, berührt wird.

Betrachten wir den Fundamentalkegelschnitt als eine Curve zweiter Classe, so folgt, wenn wir durch einen beliebigen Punct einer gegebenen Geraden die beiden Tangenten der Curve ziehen, dasz der zu der gegebenen Geraden in Bezug auf die beiden Tangenten zugeordnete harmonische Stral nach Nr. 82. durch einen festen Punct geht, nämlich durch den Pol der gegebenen Geraden.

Zwei Figuren, deren eine die Pole und Polaren der Geraden und Puncte der andern enthält, heiszen ***polarisch reciprok.*** Auf die wenigen Principien, die wir soeben auseinandersetzten, gründet sich die berühmte Methode von *Poncelet***), mittelst welcher man von den Eigenschaften der einen Figur zu denen der andern Figur übergeht.

108. Conjugierte Pole und Polaren.

Zwei Puncte *o* und *o'*, von denen jeder auf der Polare des andern liegt, heiszen *conjugierte Pole.* Die unbegrenzte Zahl von Paaren conjugierter Pole, welche auf einer Geraden liegen, bilden eine quadratische Involution, deren zweifache Puncte die Durchschnittspuncte des Kegelschnittes mit der Transversale sind. Folglich sind die Puncte des Fundamentalkegelschnittes sich selbst conjugiert.

Die Polaren zweier conjugierter Pole, das heiszt zwei Gerade, von denen jede durch den Pol der andern geht, heiszen *conjugierte Polaren.* Die unbegrenzte Zahl conjugierter Polaren, die alle durch denselben Punct gehen, bilden eine quadratische Involution, deren Doppelstralen die Tangenten des Fundamentalkegelschnitts sind, die man durch den gegebenen Punct an denselben legen kann. Folglich sind diese Tangenten sich selbst conjugierte Polaren.

---

*) *Chasles. Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science etc.* (Mémoires couronnés par l'Académie R. de Bruxelles, t. 11, 1837, p. 582).

**) *Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822.

a. Conjugierte Dreiecke und Dreiseite.

Zwei conjugierte Pole und der Pol der Geraden, welche dieselben verbindet, bestimmen ein Dreieck, in dem jede Seite die Polare des Gegenscheitels ist. Das so bestimmte Dreieck heiszt dem gegebenen Kegelschnitte *conjugiert.*

Zwei conjugierte Polaren und die Polare ihres Durchschnittspunctes bilden ein Dreiseit, in welchem jeder Scheitel der Pol der Gegenseite ist. Dieses Dreiseit heiszt dem gegebenen Kegelschnitt *conjugiert.*

b. Eigenschaften des einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks und des demselben umgeschriebenen Vierseits.

Zieht man durch den Punct p zwei Transversalen, welche einen Kegelschnitt in den vier Puncten b, c; a, d schneiden, und sind q, r die Durchschnittspuncte der Geradenpaare (ca,bd) und (ab, cd), so ist qr die Polare von p, und es ist also im Dreieck pqr jeder Scheitel der Pol der Gegenseite. Dies ist eine unmittelbare Folge aus den in Nr. 5. auseinandergesetzten Eigenschaften des vollständigen Vierecks *abcd.* Daraus ergibt sich:

Lehrsatz III. *Alle einem vollständigen Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte sind dem Dreieck, welches durch die drei Diagonalpuncte gebildet wird, conjugiert.*

Zieht man durch zwei Puncte einer Geraden P vier Tangenten B, C; A, D an einen gegebenen Kegelschnitt und sind Q und R die Geraden, welche durch die Punctepaare ($C{\cdot}A$, $B{\cdot}D$) und ($A{\cdot}B$, $C{\cdot}D$) gehen, so ist der Punct $Q{\cdot}R$ der Pol der Geraden P, und es ist also im Dreiseit PQR jede Seite die Polare des Gegenscheitels. Dies ist eine unmittelbare Folge aus den in Nr. 5. auseinandergesetzten Eigenschaften des vollständigen Vierseits $ABCD$. Daraus ergibt sich:

Lehrsatz III'. *Alle einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte sind dem von den drei Diagonalen gebildeten Dreiseite conjugiert.*

c. Gemeinschaftliche conjugierte Dreiecke oder Dreiseite zweier Kegelschnitte. Nach Nr. 89. ist im Allgemeinen ein Punct, der in Bezug auf zwei Curven eines Büschels dieselbe gerade Polare hat, für eine Curve des Büschels ein Doppelpunct, das heiszt, zwei Kegelschnitte können auszer dem Dreieck, deszen Scheitel die drei Doppelpuncte

---

p. 122. — *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques.* (Crelles Journal. T. 4. Berlin, Reimer 1829. S. 1).

des Büschels sind, das durch sie bestimmt wird, kein weiteres gemeinschaftliches conjugiertes Dreieck haben. Es sind daher die Diagonalpuncte des vollständigen Vierecks, das durch die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte zweier Kegelschnitte gebildet wird, und die Diagonalen des vollständigen Vierseits, das durch die gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kegelschnitte entsteht, bezüglich die Scheitel und die Seiten des einzigen Dreiecks, das beiden Curven gleichzeitig conjugiert ist.

d. Besonderer Fall des Satzes von Pascal. Der Satz von *Pascal* in Nr. 45 *c.* für ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Sechseck liefert, wenn man den zweiten Eckpunct dem ersten unendlich nahe nimmt, und ebenso den fünften unendlich nahe dem vierten, die folgende Beziehung zwischen vier Puncten eines Kegelschnittes und den Tangenten in zwei derselben:

Lehrsatz IV. *Ist ein Viereck einem Kegelschnitte eingeschrieben, so schneiden sich die Tangenten durch zwei der Eckpuncte auf der Verbindungsgeraden zweier Diagonalpuncte.*

Hieraus schlieszt man leicht, das die Diagonalen des aus vier Tangenten eines Kegelschnittes gebildeten Vierseits die Seiten des Dreiecks sind, deszen Scheitel die Diagonalpuncte des durch die vier Berührungspuncte gebildeten Vierecks sind.

e. Netz zweiter Ordnung. Sind von einem vollständigen Vierecke *abcd* die drei Diagonalpuncte *p*, *q*, *r* und ein Scheitel *a* gegeben, so ist dasselbe nur auf eine einzige Weise bestimmbar. Es ist nämlich der Scheitel *b* der zu *a* in Bezug auf die Puncte zugeordnete harmonische Punct, in denen *pq* und *pr* die Gerade *ar* schneiden; u. s. w. Folglich bilden die Kegelschnitte, welche durch denselben Punct *a* gehen, und demselben Dreieck *pqr* conjugiert sind, ein Curvenbüschel und wir haben daher nach Nr. 92.:

Lehrsatz V. *Die Gesammtheit der Kegelschnitte, die einem gegebenen Dreiecke conjugiert sind, bildet ein Netz.*

f. Netz zweiter Ordnung. Fortsetzung. Die Curven dieses Büschels, welche einen gegebenen Abschnitt *oo'*

harmonisch teilen, bilden ein Curvenbüschel. Ist nämlich t ein beliebiger Punct, so haben alle Kegelschnitte, die durch t gehen, drei weitere Puncte gemein, das heiszt nach Nr. 49. schneiden sie die Gerade oo' in Punctepaaren, die in Involution stehen. Nach Nr. 25*a*. aber bilden die Punctepaare, welche oo' harmonisch teilen, ebenfalls eine Involution und die beiden Involutionen haben ein Paar conjugierter Puncte gemein; durch t geht also nur ein einziger Kegelschnitt des Netzes, der den gegebenen Bedingungen Genüge leistet, w. z. b. w. Mit andern Worten, das Netz enthält ein Kegelschnittsbüschel, für deszen einzelne Curven die Puncte o und o' conjugierte Pole bilden.

Zwei Büschel eines Netzes haben immer eine Curve gemein. Sucht man daher den Kegelschnitt des Netzes, für welchen o sowol zu o' als zu o'' conjugiert ist, oder, was dasselbe ist, für welchen o die Polare $o'o''$ hat, so läszt die Aufgabe nur eine einzige Auflösung zu, das heiszt, es gibt nur einen Kegelschnitt, in Bezug auf den ein gegebenes Dreieck conjugiert ist, und ein gegebener Punct der Pol einer gegebenen Geraden.

g. Bedingung, unter der zwei Dreiecke demselben Kegelschnitte conjugiert sind. Es seien pqr und $p'q'r'$ zwei dem Fundamentalkegelschnitte conjugierte Dreiecke; s und t die Puncte, in denen die Geraden $p'q'$ und $p'r'$ die Gerade qr schneiden; s' und t' die Puncte, in denen $q'r'$ von pq und pr geschnitten wird. Offenbar sind dann die Polaren der Puncte q, r, s, t die Geraden $p(r, q, r', q')$, welche $q'r'$ in den Puncten t', s', r', q' schneiden. Das System dieser vier Geraden und das ihrer vier Pole hat nach Nr. 107. dasselbe anharmonische Verhältnisz, das heiszt es ist

$$(qrst) = (t's'r'q'),$$

also auch nach Nr. 1.

$$(qrst) = (s't'q'r'),$$

das heiszt, die vier Geraden $pq, pr, p'q', p'r'$ schneiden die Geraden qr und $q'r'$ in zwei Systemen von vier Puncten, die dasselbe Doppelverhältnisz haben. Die sechs Seiten der beiden gegebenen Dreiecke bilden daher nach Nr. 60. ein Sechsseit von *Brianchon*. Auszerdem haben aber die beiden

Büschel von je vier Geraden $p'(q, r, q', r')$ und $p(q, r, q', r')$ ebenfalls dasselbe anharmonische Verhältnisz, so dasz nach Nr. 59. die sechs Scheitel der eben benützten Dreiecke ein Sechseck von **Pascal***) bilden. Daraus folgt:

Lehrsatz VI. *Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte umgeschrieben, so sind sie auch einem zweiten Kegelschnitte eingeschrieben, und umgekehrt.*

Lehrsatz VII. *Damit zwei Dreiecke demselben Kegelschnitte conjugiert sind, ist notwendig aber auch hinreichend, dasz sie einem andern Kegelschnitte umgeschrieben, oder einem dritten Kegelschnitte eingeschrieben sind.*

Diese Eigenschaft kann man auch dahin aussprechen, dasz ein Kegelschnitt, der fünf von den sechs Seiten zweier einem gegebenen Kegelschnitt conjugierter Dreiecke berührt, auch die sechste berührt, und dasz der Kegelschnitt, welcher durch fünf der Scheitel dieser Dreiecke geht, auch durch den sechsten beschrieben ist. Hieraus folgert sich:

Lehrsatz VIII. *Berührt ein Kegelschnitt die Seiten eines einem zweiten Kegelschnitt conjugierten Dreiecks, so sind eine unbegrenzte Zahl anderer diesem letzteren conjugierter Dreiecke dem ersten Kegelschnitte umgeschrieben, das heiszt, die Tangenten, welche vom Pole einer jeden Tangente des ersten Kegelschnittes in Bezug auf den zweiten an beide Kegelschnitte gelegt werden können, bilden ein harmonisches Stralenbüschel.*

Lehrsatz VIII'. *Geht ein Kegelschnitt durch die Scheitel eines einem zweiten Kegelschnitte conjugierten Dreiecks, so ist er noch einer unbegränzten Zahl anderer dem letzten Kegelschnitte conjugierter Dreiecke umgeschrieben, das heiszt, jeder Punct des ersten Kegelschnitts ist in Bezug auf den zweiten der Pol einer Geraden, welche die beiden Curven in vier harmonischen Puncten schneidet.*

109. **Lehrsatz von Hesse.** Die einem Viereck *abcd* umgeschriebenen Kegelschnitte werden nach Nr. 49. von einer beliebigen Transversale in Punctepaaren geschnitten, die eine

*) Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.* Berlin 1832, S. 308. (Aufg. 46). — Chasles, *Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques.* (Journal de M. Liouville août 1838, p. 396).

Involution bilden. Unter diesen Kegelschnitten sind drei, die aus einem Paar gerader Linien bestehen; so dasz also die Paare von Gegenseiten (*bc, ad*), (*ca, bd*) (*ab, cd*) des Vierecks die Transversale in sechs Puncten a', a_1; b', b_1; c', c_1 schneiden, die in Involution stehen*). Werden umgekehrt die Seiten eines Dreiecks *abc* von einer Transversale in den Puncten a', b', c' geschnitten, und sind diese Puncte mit den Puncten a_1, b_1, c_1 derselben Transversale in Involution, so schneiden sich die Geraden aa_1, bb_1, cc_1 in demselben Puncte *d*.

Es sei nun ein Dreieck *abc* gegeben, deszen Seiten *bc*, *ca*, *ab* eine Transversale bezüglich in den Puncten a', b', c' schneiden; auszerdem sei ein Kegelschnitt gegeben, für welchen die Puncte a_1, b_1, c_1, die in derselben Transversale liegen, die respect. conjugierten Pole von a', b', c' sind. Unter diesen Bedingungen sind nach Nr. 108. die Punctepaare a', a_1; b', b_1; c', c_1 in Involution und die Geraden aa_1, bb_1, cc_1 gehen folglich durch denselben Punct *d*. Setzen wir nun noch voraus, dasz *a* und *b* die respectiven conjugierten Pole von a' und b' sind, so sind aa_1 und bb_1 bezüglich die Polaren der Puncte a' und b', so dasz dann *d* der Pol der Transversale ist. Die Polare von c' ist daher auch cc_1, und die Puncte *c* und c' sind ebenfalls conjugierte Pole. Wir haben somit den Satz:

Lehrsatz IX. ***Bilden die Endpuncte zweier Diagonalen aa' und bb' eines vollständigen Vierseits in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zwei Paare conjugierter Pole, so sind auch die Endpuncte der dritten Diagonale cc' conjugierte Pole für denselben Kegelschnitt**).***

---

*) Fallen die Puncte *a*, *b*, *c*, *d* paarweise zusammen, das heiszt, berühren sich die Kegelschnitte des Büschels in zwei Puncten *a* und *c*, so reducieren sich die beiden Paare von Gegenseiten des Vierecks auf die Berührungssehne *ac*, als das System zweier zusammenfallender Geraden betrachtet. Das dritte Paar Gegenseiten wird durch die den beiden gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangenten gebildet. Folglich bestimmen, wenn ein Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten von einer Transversale geschnitten werden, die vier Durchschnittspuncte eine quadratischen Involution. deren einer Doppelpunct auf der Berührungssehne liegt.

**) *Hesse*, *De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis.* (Dissertatio pro venia legendi), Regiomonti, 1840. p. 17.

110. Reciproke Polaren. Durchläuft ein Pol eine gegebene Curve C_m der m-ten Ordnung, die δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen hat, so hüllt die gerade Polare in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt C_2 eine zweite Curve der m-ten Classe mit δ Doppeltangenten und $\varkappa$ Wendepuncten ein, die nach Nr. 103. auch der Ort der Pole der Tangenten von C_m ist. Diese beiden Curven heiszen *reciproke Polaren*.

a. Fälle, wenn die Fundamentalcurve aus zwei Geraden oder zwei Puncten besteht.

Ist die Fundamentalcurve C_2 das System zweier Geraden, die sich im Puncte i schneiden, so geht die Polare jedes beliebigen Punctes o durch i, und sie ist nach Nr. 73 *b.* der conjugierte harmonische Stral von oi in Bezug auf das Stralenpaar, aus denen der Fundamentalkegelschnitt besteht. Die Polare des Punctes i selbst ist aber nach Nr. 72. unbestimmt, das heiszt, jede beliebige Gerade der Ebene kann als Polare von i angesehen werden. Hieraus folgt, dasz jede Gerade, die durch i geht, eine unbegrenzte Zahl Pole hat, die alle in einer zweiten Geraden liegen, die gleichfalls durch i geht, während eine Gerade, die nicht durch i gezogen ist, nur diesen einzigen Punct als Pol hat *).

Ist daher eine Curve der r-ten Classe gegeben, als Einhüllende von geraden Linien betrachtet, so ist ihre reciproke Polare, das heiszt der Ort

Ist die Fundamentalcurve C_2, als Einhüllende zweiter Classe angesehen, ein Punctepaar o, o', so liegt der Pol einer jeden Geraden R auf der Geraden oo', und der Abschnitt oo' wird durch den Pol und die Polare harmonisch geteilt. Der Pol der Geraden oo' aber ist unbestimmt, das heiszt, jeder Punct der Ebene kann als Pol dieser Geraden angenommen werden. Jeder Punct der Geraden oo' selbst hat also eine unbegrenzte Zahl Polaren, die sich alle in einem zweiten Puncte derselben Geraden schneiden, während ein beliebiger auszerhalb oo' gelegener Punct nur diese eine Gerade oo' selbst zur Polare hat.

Ist daher eine Curve r-ter Ordnung gegeben, so ist ihre reciproke Polare, das heiszt die Einhüllende der Polaren ihrer Puncte, das System von r Pun-

*) Ist der Kegelschnitt ein System zweier zusammenfallender Geraden, so stellt diese die Polare eines beliebigen Punctes der Ebene vor. Es ist klar, dasz in diesem Falle jede Gerade in der Ebene den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Puncten schneidet. Analoges läszt sich von einem Kegelschnitt, als Einhüllende betrachtet, sagen, welcher aus dem System zweier zusammenfallender Puncte besteht.

der Pole ihrer Tangenten, das System von r Geraden, die durch i gehen, und die der Reihe nach die conjugierten harmonischen Stralen der r Tangenten sind, die man von i an die gegebene Curve in Bezug auf die beiden Geraden, aus denen C_2 besteht, legen kann.

cten, die sämmtlich mit o und o' in gerader Linie liegen und in Bezug auf diese beiden Puncte die conjugierten harmonischen Puncte der Durchschnittspuncte der gegebenen Curve mit der Geraden oo' sind.

b. Curve von Hesse eines Netzes zweiter Ordnung. Unter Annahme der links stehenden Voraussetzung ist augenblicklich klar, dasz i der Scheitel eines jeden conjugierten Dreiseits sein wird, und dasz zwei Seiten dieses Dreiseits mit den beiden Geraden, aus denen die Fundamentalcurve besteht, ein harmonisches Stralenbüschel bilden. Ist umgekehrt ein gegebenes Dreiseit einem Kegelschnitte conjugiert, der aus dem System zweier Geraden besteht, so müszen diese sich in einem der Eckpuncte schneiden und mit zwei Seiten dieses Dreiseits ein harmonisches Stralenbüschel bilden; speciell wird eine jede Seite des Dreiseits, als das System zweier zusammenfallender Geraden betrachtet, einen dem Dreiseit conjugierten Kegelschnitt darstellen. Die drei Geraden, welche das Dreiseit bilden, enthalten folglich sämmtliche Doppelpuncte der Kegelschnitte, welche diesem Dreiseit conjugiert sind, und es gilt daher nach Nr. 92. und Nr. 108*c*. der Satz:

Lehrsatz X. *Die Curve von Hesse eines Netzes, das durch die einem gegebenen Dreiseit conjugierten Kegelschnitte gebildet wird, ist dieses Dreiseit selbst.*

111. Reciproke conische Polaren. Dem allgemeinen Theorem in Nr. 110. gemäsz ist die reciproke Polare eines Kegelschnittes K in Bezug auf einen andern Kegelschnitt C_2 ein dritter Kegelschnitt K'. Die beiden Curven K und K' haben dabei die Beziehung unter einander, dasz die Tangenten eines jeden von ihnen die Polaren der Puncte der andern in Bezug auf C_2 als Fundamentalcurve sind. In den vier Puncten, welche die Grundcurve C_2 mit K gemein hat, wird sie von den vier Tangenten, die sie mit K' gemein hat, berührt, und es sind somit nach Nr. 108*d*. die drei Kegelschnitte C_2, K und K' ein und demselben Dreiecke conjugiert.

a. **Fortsetzung.** Ist R die Polare des Punctes r in Bezug auf K, und sind r' und R' bezüglich der Pol und die Polare von R und r in Bezug auf C_2, so musz offenbar r' der Pol von R' in Bezug auf K sein.

b. **Einem Viereck oder Vierseit um- oder eingeschriebene reciproke conische Polaren.** Die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der beiden Curven K und K' sind in Bezug auf C_2 die Pole der gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kegelschnitte. Hieraus folgert sich, dasz, wenn mehrere Kegelschnitte ein und demselben Viereck umgeschrieben sind, ihre reciproken Polaren ein und demselben Vierseit eingeschrieben sein werden, und da die ersten Kegelschnitte von einer beliebigen Transversale in Punctepaaren, die in Involution stehen, geschnitten werden, so stehen auch die Stralenpaare, die man von einem beliebigen Puncte an die einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte legen kann, in Involution.

c. **Zahl der Kegelschnitte, für welche zwei gegebene Kegelschnitte reciproke Polaren darstellen.** Sind die beiden Kegelschnitte K und K' *a priori* gegeben, schneiden sich dieselben in den Puncten a, b, c, d und haben sie die gemeinschaftlichen Tangenten A, B, C, D, so musz der Kegelschnitt, in Bezug auf den K und K' reciproke Polaren vorstellen, nach Nr. 111. dem Dreiecke conjugiert sein, das durch die Diagonalpuncte des Vierecks $abcd$ und durch die Diagonalen des Vierseits $ABCD$ gebildet wird (m. s. Nr. 108*c.*). Um diesen Kegelschnitt vollständig zu bestimmen, genügt es nach Nr. 108*f.* die Bedingung hinzuzufügen, dasz der Punct a in Bezug auf ihn der Pol einer der vier Geraden A, B, C, D sei. Hieraus folgt:

Lehrsatz XI. *Es gibt stets vier Kegelschnitte, in Bezug auf welche zwei gegebene Kegelschnitte reciproke Polaren darstellen.*

d. **Dreiecke die einem Kegelschnitte conjugiert und einem zweiten ein- oder umgeschrieben sind.** Es seien zwei Kegelschnitte K und K' gegeben, von denen der erste einem dem zweiten conjugierten Dreiecke pqr umgeschrie-

ben sei. Ist C_2 ein Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die gegebenen reciproke Polaren vorstellen, und sind die Geraden P, Q, R die Polaren der Puncte p, q, r in Bezug auf C_2, so wird das Dreiseit PQR dem Kegelschnitt K' umgeschrieben sein. Das Dreieck pqr ist aber dem Kegelschnitt K' conjugiert vorausgesetzt, und es musz folglich nach *a.* das Dreiseit PQR dem Kegelschnitte K conjugiert sein. Das gibt auch:

Lehrsatz XII. *Ist ein Kegelschnitt einem Dreieck umgeschrieben, das einem zweiten Kegelschnitte conjugiert ist, so ist gleichzeitig dieser zweite Kegelschnitt einem dem ersten Kegelschnitt conjugierten Dreiseit eingeschrieben, und umgekehrt*).*

Nehmen wir noch Rücksicht auf den doppelten Ausdruck des Satzes in Nr. 108*g.*, so haben wir:

Lehrsatz XIII. *Ist ein Kegelschnitt einem Dreiseit eingeschrieben, das einem zweiten Kegelschnitte conjugiert ist, oder auch einem diesem Kegelschnitte conjugierten Dreieck umgeschrieben, so ist die reciproke Polare des zweiten Kegelschnittes in Bezug auf den ersten die Einhüllende einer Geraden, welche die beiden Kegelschnitte harmonisch schneidet, und die reciproke Polare des ersten Kegelschnitts in Bezug auf den zweiten ist der Ort der Puncte, von denen die Tangenten an die gegebenen beiden Kegelschnitte ein harmonisches Stralenbüschel bilden.*

e. **Kegelschnitte, deren Tangenten zwei gegebene Kegelschnitte in harmonischen Puncten schneiden.** Unter der Annahme, es seien zwei Kegelschnitte K und K' gegeben, stellen wir die folgenden allgemeinen Aufgaben**):

Welches ist die Einhüllende einer Geraden, die zwei gegebene Kegelschnitte in vier harmonischen Puncten scheidet? Wieviel Gerade, die diese Eigenschaft besitzen, gehen durch einen beliebigen Punct, z. B. durch einen

Was ist der Ort der Puncte, durch welche man ein harmonisches Tangentenbüschel an zwei gegebene Kegelschnitte legen kann? Wieviel Puncte, die diese Eigenschaft besitzen, gibt es auf einer beliebigen Geraden,

*) *Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes,* Leipzig, Teubner 1861. S. 715.

**) *v. Staudt. Ueber die Curven zweiter Ordnung.* Nürnberg 1831. S. 25.

der vier gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte a, b, c, d der beiden gegebenen Kegelschnitte?

Damit eine durch a gezogene Gerade K und K' in vier harmonischen Puncten schneidet, müssen drei derselben mit a zusammenfallen, das heiszt, die einzigen Tangenten, die man durch a an die gesuchte Einhüllende legen kann, sind die beiden Geraden, welche in diesem Puncte den einen oder andern Kegelschnitt berühren. Die Einhüllende ist also ein Kegelschnitt F, der die acht Geraden berührt, welche die Tangenten der beiden gegebenen Kegelschnitte in den gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten a, b, c, d darstellen.

Von diesen acht Geraden sind nach Nr. 111. die vier, welche K' berühren, gleichzeitig Tangenten der reciproken conischen Polare H von K in Bezug auf K', und es sind also die Kegelschnitte K', H, F demselben Vierseit eingeschrieben. Schneidet also eine Tangente von H, die nicht gleichzeitig eine solche von K' ist, K und K' in harmonischen Puncten, so fallen die Kegelschnitte H und F zusammen. Dies geschieht z. B. nach $d.$, sobald K einem zu K' conjugiertem Dreiecke umgeschrieben ist.

z. B. auf einer der gemeinschaftlichen Tangenten A, B, C, D der beiden gegebenen Kegelschnitte?

Die einzigen Durchschnittspuncte der Geraden A mit dem Orte, den wir bestimmen wollen, sind offenbar die Puncte, in denen diese Gerade den einen oder andern der gegebenen Kegelschnitte berührt. Der gesuchte Ort ist daher ein Kegelschnitt F', der durch die acht Puncte geht, in denen die gegebenen Kegelschnitte von ihren gemeinschaftlichen Tangenten berührt werden.

Von diesen acht Puncten gehören die vier, welche auf K liegen, auch der reciproken conischen Polare H' von K' in Bezug auf K an, das heiszt, die Kegelschnitte K, H', F' gehören zu ein und demselben Curvenbüschel. Ist nun ein Punct von H', der nicht auch auf K liegt, Mittelpunct eines harmonischen Tangentenbüschels an K und K', so fallen die Kegelschnitte H' und F' in einen einzigen zusammen. Dies geschieht z. B. nach $d.$, sobald K' einem zu K conjugierten Dreiseit eingeschrieben ist.

Ist C_2 ein Kegelschnitt, für den K und K' reciproke Polaren sind, so sind offenbar die Kegelschnitte F und F', so wie ebenso H und H' in Bezug auf C_2 ebenfalls reciproke Polaren.

f. **Dreiecke, die einem Kegelschnitte conjugiert und einem andern ein- oder umgeschrieben sind. Fortsetzung. Es seien K, K', K'' drei ein und demselben Viereck *abcd* umgeschriebene Kegelschnitte, und es seien**

auszerdem die beiden ersten bezüglich zwei Dreiecken umgeschrieben, die beide demselben Kegelschnitte C_2 conjugiert sind. Unter diesen Voraussetzungen werden die reciproken conischen Polaren H, H', H'' der ersten Kegelschnitte in Bezug auf C_2 nach *b.* sämmtlich von den Geraden A, B, C, D, den Polaren der Puncte a, b, c, d in Bezug auf C_2, berührt werden. Die Gerade A schneidet daher nach *d.* sowol die beiden Kegelschnitte C_2 und K, als die beiden andern C_2 und K' in harmonischen Puncten, das heiszt, die Durchschnittspuncte von A und C_2 sind die Doppelpuncte der quadratischen Involution, welche durch die Kegelschnitte des Büschels (KK') auf A bestimmt wird. A schneidet deshalb auch C_2 und K'' in harmonischen Puncten, und es folgt somit nach *e.*:

Lehrsatz XIV. *Sind in zwei Kegelschnitten je ein einem gegebenen Kegelschnitte conjugiertes Dreieck eingeschrieben, so ist auch jeder andere Kegelschnitt, der durch die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der ersten beiden beschrieben ist, einem dem gegebenen Kegelschnitte conjugierten Dreiecke umgeschrieben.*

111*bis.* Curvenreihen zweiter Ordnung. Unter den Kegelschnitten, die durch vier Puncte a, b, c, d beschrieben sind, gibt es nach Nr. 49. *zwei*, welche eine Gerade L berühren, und es bilden daher die Kegelschnitte, welche durch drei Puncte a, b, c gehen und eine gegebene Gerade L berühren, eine Reihe vom Index 2.

Unter den Kegelschnitten dieser Reihe gibt es nach Nr. 85. *vier* die eine andere Gerade M berühren. Die Kegelschnitte daher, die, durch zwei Puncte a und b beschrieben, zwei gegebene Gerade L und M berühren, bilden eine Reihe vom Index 4. Die Puncte a, b und die, in denen ab die Geraden L und M schneidet, bestimmen eine quadratische Involution, deren Doppelpuncte durch f und f' bezeichnet werden mögen. In ihnen schneiden sich nach Nr. 109., Anmerkung 1. die Berührungssehnen aller Kegelschnitte der Reihe mit den gemeinschaftlichen Tangenten L und M. Soll die Berührungssehne durch f gehen, und der Kegelschnitt durch einen dritten Punct c, so gibt es zwei Auflösungen der Aufgabe, die durch die Doppelpuncte der andern Involution individualisiert werden,

welche die Puncte *a*, *c* mit den gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten der Geraden *ac* und der Tangenten *L* und *M* bilden *). Die erwähnte Reihe Kegelschnitte vom Index 4 zerfällt also in zwei verschiedene Reihen, jede vom Index 2, entsprechend den beiden Büscheln Berührungssehnen, die sich in *f* oder in *f'* schneiden **). Die geraden Polaren eines beliebigen Punctes *o* in Bezug auf die Kegelschnitte einer beliebigen der beiden eben erwähnten Reihen bilden eine neue Reihe vom Index 2. Da die Reihe Kegelschnitte und die Reihe von Geraden projectivisch sind, so erzeugen sie nach Nr. 83. durch die gegenseitigen Durchschnittspuncte ihrer homologen Elemente eine Curve sechster Ordnung, die nach Nr. 85. der Ort der Berührungspuncte zwischen den Geraden, welche durch *o* gehen, und den Kegelschnitten der Reihe ist. Dieser Ort ist aber aus einer Curve der vierten Ordnung und aus der zweimal genommenen Geraden *ab* zusammengesetzt. Ist nämlich *m* ein Punct von *ab*, so führt jeder der *beiden* Kegelschnitte der Reihe, die durch *m* gehen, auf das System zweier mit *ab* zusammenfallender Geraden, und somit wird dieselbe von der Geraden *om* in zwei mit *m* zusammenfallenden Puncten geschnitten. Der Punct *m* zählt also *zweimal* als Berührungspunct zwischen den Geraden, welche von *o* ausgehen, und den Kegelschnitten der Reihen vom Index 2, die wir betrachten. Die Curve der vierten Ordnung geht zweimal durch *o*, und es musz daher eine beliebig durch *o* gezogene Gerade *N* nach Nr. 85. noch zwei Kegelschnitte der Reihe in andern Puncten berühren, und demgemäsz auch noch zwei Kegelschnitte der zweiten Reihe. Es giebt somit vier Kegelschnitte, die drei gegebene Gerade *L*, *M*, *N* berühren und durch zwei gegebene Puncte *a* und *b* gehen.

Aus dem Letzten folgt, dasz die Kegelschnitte, die durch einen Punct *a* beschrieben sind und von drei Geraden *L*, *M*, *N*

*) *Salmon*, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte, deutsch bearbeitet von W. Fiedler*, Leipzig. Teubner, 1860, S. 309 und 589.

**) Geht die Gerade *ab* durch den Punct *LM*, so fällt einer der Puncte *f*, *f'* mit diesem zusammen, so dasz also nur eine Reihe Kegelschnitte vom Index 2 übrig bleibt, die dem andern Puncte entspricht, der mit *LM* zusammen das Segment *ab* harmonisch teilt. Das heiszt, geht die Gerade *ab* durch den Punct *LM*, so gibt es nur zwei wirkliche Kegelschnitte, die durch die Puncte *a* und *b* gehen, und die Geraden *L*, *M* und eine dritte *N* berühren.

berührt werden eine Reihe vom Index 4 bestimmen. Die geraden Polaren eines Punctes i erzeugen eine andere Reihe von demselben Index, und die beiden Reihen erzeugen, da sie projectivisch sind, einen Ort der zwölften Ordnung, der sich aber in eine Curve der sechsten Ordnung und in die drei Graden $a(M{\cdot}N)$, $a(N{\cdot}L)$, $a(L{\cdot}M)$, jede doppelt gezählt, auflöst. Durch m gehen nämlich, wenn derselbe ein Punct dieser Geraden, z. B. $a(M{\cdot}N)$ ist, nur zwei wirkliche Kegelschnitte, jeder der beiden anderen fällt mit der als das System zweier zusammenfallender Geraden aufzufaszenden Geraden $a(M{\cdot}N)$ zusammen. Die Curve sechster Ordnung geht viermal durch i, und eine beliebig durch diesen Punct gezogene Gerade H berührt daher in andern Puncten noch zwei Kegelschnitte der Reihe. Durch einen gegebenen Punct gehen also nur *zwei* Kegelschnitte, welche vier gerade Linien berühren.

Hieraus folgt, dasz die Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade L, M, N, H berühren, eine Reihe vom Index 2 bilden. Da dieselbe mit einer zweiten, durch die geraden Polaren eines Punctes n gebildeten Reihe von demselben Index projectivisch ist, so erzeugen die entsprechenden Elemente einen Ort der sechsten Ordnung, der aus einem Orte dritter Ordnung und aus den drei Diagonalen des Vierseits $LMNH$ zusammengesetzt ist. Ist nämlich m ein Punct einer der Diagonalen, so ist von den beiden Kegelschnitten der Reihe, die durch m gehen, nur ein einziger wirklich ein Kegelschnitt. Der andere reducirt sich auf die Diagonale selbst, als System zweier zusammenfallender Geraden betrachtet. Die Curve der dritten Ordnung geht zweimal durch n, und eine beliebig durch diesen Punct gezogene Gerade berührt daher in andern Puncten noch einen Kegelschnitt der Reihe. Es gibt also nur noch einen einzigen Kegelschnitt, der fünf gegebene Gerade berührt.

a. Zahl der Kegelschnitte, die fünf gegebenen Bedingungen genügen. Wir wollen jetzt die Zahl der Kegelschnitte zu bestimmen suchen, welche fünf gegebenen Bedingungen genügen (durch gegebene Puncte gehen und gegebene Curven berühren*)). Ich wiederhole zuerst die folgende schon in Nr. 87. bewiesene Eigenschaft:

*) Diese Curven denken wir uns in ihrer bestimmten Ordnung vollstän-

Theorem I. *Wenn* M' *Kegelschnitte einer Reihe von Kegelschnitten vom Index* M *eine beliebige Gerade berühren, so gibt es* $M'.n + M.n(n-1)$, *welche eine gegebene Curve der n-ten Ordnung berühren.*

Die Zahl M' ist nach Nr. 85. im Allgemeinen gleich 2M, aber sie kann eine Verminderung erfahren, wenn wir von den Kegelschnitten, welche die Aufgabe lösen, die Systeme von zusammenfallenden Geraden, die in bestimmten Fällen diese bilden, abrechnen. Dies kann offenbar nicht eintreten, wenn die Kegelschnitte der Reihe durch vier oder drei gegebene Puncte gehen müszen. Da wir also für ein Kegelschnittbüschel $M = 1$, $M' = 2$ haben, so geht das Theorem I. über in:

Theorem II. *Es gibt* $n(n+1)$ *Kegelschnitte, die durch vier Puncte gehen und eine gegebene Curve n-ter Ordnung berühren.*

Das heiszt nun, die Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Puncte gehen und eine Curve n-ter Ordnung berühren, bilden eine Reihe vom Index $n(n+1)$, und es gibt also $2n(n+1)$, die eine gegebene Gerade berühren. Aus demselben Theorem I. ergibt sich demnach:

Theorem III. *Es gibt* $n.n_1(n+1)(n_1+1)$ *Kegelschnitte, die durch drei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene Curven von der Ordnung* n *und* n_1 *berühren.*

Wir wiszen, dasz die Kegelschnitte, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene Gerade berühren, eine Reihe vom Index 4 bilden, in der es vier Kegelschnitte gibt, die eine dritte Gerade berühren, wenden wir nun das Theorem I. an, so entsteht:

Theorem IV. *Es gibt* $4n^2$ *Kegelschnitte, welche durch zwei gegebene Puncte gehen, und zwei gegebene Gerade, so wie eine ebenfalls gegebene Curve n-ter Ordnung berühren.*

Aus dem Theorem III. folgert sich, dasz die Kegelschnitte,

---

dig allgemein, das heiszt, ohne jeden vielfachen Punct, und ausserdem sowol unter sich, als von den andern gegebenen Daten der Frage vollständig unabhängig.

welche durch zwei Puncte gehen und eine Gerade und eine Curve n-ter Ordnung berühren, eine Reihe vom Index $2n(n+1)$ bilden, in der nach Theorem IV. $4n^2$ Kegelschnitte existieren, die eine zweite Gerade berühren. Folglich gibt Theorem I.:

Theorem V. *Es gibt* $2n.n_1(n.n_1+n+n_1-1)$ *Kegelschnitte, die durch zwei gegebene Puncte gehen und eine gegebene Gerade, sowie zwei gegebene Curven von den Ordnungen* n *und* n_1 *berühren.*

Diese Zahl ist genau gleich $2n.n_1(n+1)(n_1+1)$ weniger $4n.n_1$.

Die Theoreme III. und V. geben die Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa'$ für die Reihe der Kegelschnitte, welche durch zwei Puncte gehen, und zwei gegebene Curven berühren. Folglich gibt das Theorem I.:

Theorem VI. *Es gibt*

$$n.n_1.n_2\{n.n_1.n_2+(n.n_1+n_1.n_2+n_2.n)+(n+n_1+n_2)-3\}$$

Kegelschnitte, die durch zwei gegebene Puncte gehen und drei gegebene Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2 *berühren.*

Indem wir dasselbe Theorem I. auf die Reihe vom Index 4 der Kegelschnitte anwenden, welche durch einen gegebenen Punct gehen und drei gegebene Gerade berühren, von der wir wiszen, dasz sie je zwei Kegelschnitte enthält, die eine vierte Gerade berühren, so entsteht:

Theorem VII. *Es gibt* $2n(2n-1)$ *Kegelschnitte, die durch einen gegebenen Punct gehen und drei gegebene Gerade, sowie eine gegebene Curve der* n*-ten Ordnung berühren.*

Die Theoreme IV. und VII. ergeben die Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa'$ in Bezug auf die Reihe Kegelschnitte, die durch einen gegebenen Punct gehen, und zwei gegebene Gerade und eine gegebene Curve berühren. Daher ist nach Theorem I.:

Theorem VIII. *Es gibt* $2n.n_1(2n.n_1-1)$ *Kegelschnitte, die durch einen gegebenen Punct gehen, und zwei gegebene Gerade, sowie zwei ebenfalls gegebene Curven der* n*-ten und* n_1*-ten Ordnung berühren.*

Analog erhält man aus den Theoremen V. und VIII.:

Theorem IX. *Es gibt*

$$2n.n_1.n_2\{n.n_1.n_2+(n.n_1+n_1.n_2+n_2.n)-(n+n_1+n_2)\}$$

Kegelschnitte, die durch einen gegebenen Punct gehen, und eine gegebene Gerade, sowie drei gegebene Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2 berühren.

Ebenso entsteht aus den Theoremen VI. und IX.:

Theorem X. *Es gibt*

$$n.n_1.n_2.n_3\left\{\begin{array}{l}n.n_1.n_2.n_3+(n_1.n_2.n_3+n_2.n_3.n+n_3.n_1.n+n_1.n_2.n)\\ \quad +(n.n_1+n_2.n_3+n.n_2+n_3.n_1+n.n_3+n_1.n_2)\\ \quad -3(n+n_1+n_2+n_3)+3\end{array}\right\}$$

Kegelschnitte, die durch einen gegebenen Punct gehen, und vier gegebene Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2, n_3 berühren.

Das Theorem IX. zeigt, dasz für die Reihe Kegelschnitte, welche durch einen Punct gehen und drei Curven berühren, der reducierte Wert von $\varkappa'$ gleich

$$2\varkappa-n.n_1.n_2(4n+4n_1+4n_2-6)$$

ist. Diese Reduction entsteht zum Teil durch die Tangenten der gegebenen Curven, die sich in dem gegebenen Puncte schneiden, und zum Teil durch die zu zwei und zwei genommenen Geraden, welche diesen Punct mit den Durchschnittspuncten dieser Curven verbinden.

Wenn eine Gerade, die durch den gegebenen Punct so gezogen ist, dasz sie eine der drei Curven berührt, die beiden andern in a und b schneidet, so zählt das Segment ab für *vier* Kegelschnitte der Reihe, welche durch einen beliebigen Punct dieser Geraden gehen. Wenn andererseits eine durch den gegebenen Punct nach einem Durchschnittspunct a gezogene Gerade die dritte Curve in b schneidet, so ist das Segment ab der Ort für *zwei* Kegelschnitte der Reihe, die durch einen beliebigen Punct derselben Geraden gehen. Die Gesammtzahl der ersten Abschnitte ist $n.n_1.n_2(n+n_1+n_2-3)$, die der zweiten $3n.n_1.n_2$, und es ist folglich das Vierfache

der ersten Zahl plus dem Doppelten der zweiten die Zahl, um welche man 2м vermindern musz, um м' zu erhalten.

Die Reihe der Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade berühren, ist vom Index 2, und unter ihnen gibt es immer nur einen, welcher eine fünfte Gerade berührt. Folglich entsteht:

Theorem XI. *Es gibt* $n(2n-1)$ *Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade und eine gegebene Curve der n-ten Ordnung berühren.*

Die Theoreme VII. und XI. geben:

Theorem XII. *Es gibt*

$$n.n_1(4n.n_1-2n-2n_1+1)$$

Kegelschnitte, welche drei gegebene Gerade und zwei gegebene Curven von den Ordnungen n *und* n_1 *berühren.*

Analog schlieszt man aus den Theoremen VIII. und XII.:

Theorem XIII. *Es gibt*

$$n.n_1.n_2\{4n.n_1.n_2-2(n+n_1+n_2)+3\}$$

Kegelschnitte, welche zwei gegebene Gerade und drei gegebene Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2 *berühren.*

Aus den Theoremen IX. und XIII. folgt:

Theorem XIV. *Es gibt*

$$n.n_1.n_2.n_3\{2n.n_1.n_2.n_3+2(n_1.n_2.n_3+....)-2(n.n_1+....)+3\}$$

Kegelschnitte, welche eine gegebene Gerade und vier gegebene Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2, n_3 *berühren.*

Endlich ergibt sich aus den Theoremen X. und XIV.:

Theorem XV. *Es gibt*

$$\left.\begin{aligned} n.n_1.n_2.n_3.n_4\{n.n_1.n_2.n_3.n_4+(n_1.n_2.n_3.n_4+....)\\ +(n.n_1.n_2+....)-3(n.n_1+....)+3(n+....)\end{aligned}\right\}$$

Kegelschnitte, welche fünf gegebene Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2, n_3, n_4 *berühren.*

Das Theorem XIV. zeigt, dasz die Differenz zwischen 2м und м' für die Kegelschnittreihe, die vier gegebene Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2, n_3 berührt, gleich ist

$$n.n_1.n_2.n_3\{4(n.n_1+\ldots)-6(n+\ldots)+3\}.$$

Diese Reduction entsteht teils durch die Tangenten, die zwei dieser Curven gemeinschaftlich sind, teils durch die Tangenten, die man von den gemeinschaftlichen Puncten zweier Curven an eine der übrigen ziehen kann, teils durch die *Diagonalen* des Systems, das heiszt durch die Geraden, welche die Durchschnittspuncte zweier Curven mit den Durchschnittspuncten zweier anderer verbinden.

Schneidet eine Gerade, die zwei Curven berührt, die beiden andern bezüglich in a und b, so zählt der Abschnitt ab für *vier* unter den Kegelschnitten der Reihe, welche aus zwei Puncten bestehen. — Zieht man durch einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct a zweier Curven eine Tangente an die dritte, welche die vierte in b schneidet, so zählt das Segment ab für *zwei* unter den Kegelschnitten der Reihe, die aus zwei Puncten bestehen. — Verbindet man endlich einen gemeinsamen Durchschnittspunct a zweier Curven mit einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct b der andern beiden Curven, so stellt das Segment ab *einen* Kegelschnitt der Reihe vor, der aus zwei Puncten besteht. Die Partialreductionen also, die durch die *gemeinschaftlichen Tangenten*, durch die *durch die Durchschnittspuncte gezogenen Tangenten* und durch die *Diagonalen* entstehen, sind der Reihe nach

$$4n.n_1.n_2.n_3\{(n.n_1+\ldots)-3(n+\ldots)+6\},$$
$$6n.n_1.n_2.n_3\{(n+\ldots)-4\},$$
$$3n.n_1.n_2.n_3.$$

Entsprechend erhält man in der Reihe Kegelschnitte, welche vier Curven berühren, folgende Kegelschnitte die einen Doppelpunct haben.

1. Zieht man von einem gemeinsamen Durchschnittspuncte zweier Curven eine Tangente an die dritte und zugleich eine an die vierte Curve, so bilden diese zwei Tangenten einen Kegelschnitt, der für *vier* Curven der Reihe gilt, die einen Doppelpunct haben.

2. Trifft eine gemeinschaftliche Tangente zweier Curven die dritte in einem Puncte, und zieht man von diesem eine Tangente

an die vierte, so erhält man ein Geradenpaar, das für *zwei* der Kegelschnitte der Reihe gilt, die einen Doppelpunct haben.

3. Eine gemeinschaftliche Tangente zweier Curven und eine solche der beiden andern bilden zusammen *einen* Kegelschnitt der Reihe, der einen Doppelpunct hat*).

§. 19.

Die Curve, welche ein Punct beschreibt, dessen Indicatricen sich nach einem bestimmten Gesetze verändern.

112. **Durch einen Punct eine Gerade zu legen, welche in ihm die Polare eines beliebigen ihrer Puncte berührt.** Indem wir den allgemeinen Fall einer Fundamentalcurve C_n einer beliebigen Ordnung n wieder aufnehmen, suchen wir durch einen gegebenen Punct p eine Gerade zu legen, welche in diesem Puncte die erste Polare eines beliebigen Punctes o derselben Geraden berührt**).

Die Pole aller ersten Polaren, die durch p gehen, liegen auf der geraden Polare dieses Punctes. Soll p auszerdem der Berührungspunct der ersten Polare mit einer durch den Pol o gelegten Tangente sein, so musz auch die zweite Polare nach Nr. 70. durch p gehen, so dasz o einer der Durchschnittspuncte der geraden Polare mit der conischen Polare von p sein musz. Das heiszt, po musz die Tangente der conischen Polare von p sein.

Die Geraden, welche die Aufgabe lösen, sind daher die beiden Tangenten, die man von p aus an die conische Polare dieses Punctes legen kann, oder auch nach Nr. 90*c*. die *Indicatricen* des Punctes p.

*) Die Theoreme II.—XV. sind schon von *Chasles*, aber ohne Beweis, in einer seiner neuesten Mitteilungen an die Pariser Akademie (Comptes rendus, 1er février 1864) aufgestellt worden. Ich schmeichle mir, dass die oben angegebenen Reductionen den Unterschied aufheben werden, der zwischen diesen Sätzen und der im 56ten Bande des *Crelle-Borchardtschen* Journals von meinem gelehrten Freunde, Herrn *Bischoff* in *München*, aufgestellten Formel besteht.

**) *Clebsch*, *a. a. O.* S. 280—285.

a. **Einhüllende der Verbindungsgeraden der entsprechenden Puncte der Curven von Hesse und Steiner.** Ist p ein Punct der Curve von *Hesse*, so besteht seine conische Polare aus einem Paar gerader Linien, die sich in dem entsprechenden Puncte o der Curve von *Steiner* schneiden, durch welchen auch die gerade Polare von p hindurchgeht. Die Puncte dieser Geraden sind Pole von ebensovielen ersten Polaren, die durch p gehen, und nach Nr. 90*a*. in diesem Puncte eine gemeinschaftliche Tangente haben, die folglich die eine Indicatrix des Punctes p darstellt. Aber beide Indicatricen von p sind nach Nr. 90*c*. in der Geraden po vereinigt, folglich gilt nach Nr. 98*b*. der Satz:

> Lehrsatz I. *Die Gerade, welche einen Punct der Curve von Hesse mit dem entprechenden Puncte der Curve von Steiner verbindet, berührt in dem ersteren Puncte alle ersten Polaren, welche durch ihn hindurchgehen.*

Deshalb kann die Curve der $3(n-1)(n-2)$-ten Classe, nämlich die Einhüllende der gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspuncten der ersten Polaren nach Nr. 91*b*. auch als *die Einhüllende der Geraden* definiert werden, *welche* (m. s. Nr. 98*b*.) *die entsprechenden Puncte der Curven von Hesse und Steiner mit einander verbinden.*

b. **Zahl der Puncte einer Geraden, für die diese selbst eine Indicatrix ist.** In einer gegebenen Geraden R existieren $2(n-2)$ Puncte, von denen ein beliebiger, etwa o, der Pol einer ersten Polare ist, die nach Nr. 103*c*. die Gerade R in einem Puncte p berührt; das gibt:

> Lehrsatz II. *In einer beliebigen Geraden gibt es immer* $2(n-2)$ *Puncte, für welche diese Gerade selbst eine Indicatrix bildet.*

Ist R eine Tangente der Fundamentalcurve, so sind im Berührungspuncte zwei Puncte o und die beiden entsprechenden Puncte p vereinigt.

113. **Ort der Puncte, deszen Indicatricen durch einen festen Punct gehen.** Was ist der Ort eines Punctes p, wenn eine seiner beiden Indicatricen durch einen festen Punct i geht?

In jeder Geraden, welche den Punct i enthält, gibt es nach Nr. 112*b*. $2(n-2)$ Lagen des Punctes p, und i repräsentiert noch zwei weitere solche Puncte p, die den beiden Indicatricen dieses Punctes selbst entsprechen. Der gesuchte Ort ist daher eine Curve L^{ii} der Ordnung

$$2(n-2)+2=2(n-1)$$

die zweimal durch i geht.

Betrachten wir eine Tangente der Grundcurve, so sind im Berührungspuncte zwei Puncte p vereinigt. Die Curve L^{ii} berührt daher C_n in den $n(n-1)$ Berührungspuncten der Tangenten, die man von i aus an dieselbe legen kann.

Nimmt der Pol o die Stelle von i ein, so sind nach Nr. 112. die $(n-1)(n-2)$ Durchschnittspuncte der ersten und zweiten Polare von i ebensoviele Lagen des Punctes p; liegt umgekehrt p in der zweiten Polare von i, so geht die conische Polare von p durch i. Der Punct i musz aber in einer Tangente liegen, die von p an die conische Polare dieses Punctes selbst gezogen ist, so dasz also auch die gerade Polare von p durch i geht, und demzufolge p in der ersten Polare von i liegt. Diese $(n-1)(n-2)$ Puncte sind aber die *einzigen*, welche die Curve L^{ii} mit der zweiten Polare von i gemein hat, woraus sich ergibt, dasz die beiden Curven sich in allen diesen Puncten berühren. Wir schlieszen also aus Allem, dasz die Curve L^{ii} die Fundamentalcurve und die zweite Polare von i in allen Puncten, die sie mit ihnen gemein hat, berührt, und dasz die

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)=2(n-1)^2$$

Berührungspuncte alle in der ersten Polare von i liegen.

Da die erste Polare von i zweimal genommen als eine Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung aufgefaszt werden kann, und die Fundamentalcurve und die zweite Polare von i zusammengenommen ebenfalls eine Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung bilden, so kann man nach Nr. 41. durch die $2(n-1)^2$ Puncte, in denen die erste Polare von i C_n und die zweite Polare schneidet, ein Curvenbüschel der $2(n-1)$-ten Ordnung hindurchlegen, deszen einzelne Curven die Fundamentalcurve und die zweite Polare von i in allen diesen Puncten berühren. Von der un-

begrenzten Zahl der Curven dieses Büschels ist diejenige, welche durch i geht, die L^{ii}.

114. **Einhüllende der Indicatricen der Puncte einer gegebenen Curve.** Von welcher Classe ist die Einhüllende der Indicatricen der Puncte einer gegebenen Curve C_m der m-ten Ordnung? oder auch, wieviel Puncte dieser Curve haben eine Indicatrix, die durch einen beliebigen festen Punct i geht?

Der Ort eines Punctes p, dessen Indicatrix durch i geht, ist nach Nr. 113. eine Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung, welche C_m in $2m(n-1)$ Puncten schneidet. In i treffen sich also $2m(n-1)$ Tangenten der gesuchten Einhüllenden.

Man bemerke noch, dass diese Einhüllende die Fundamentalcurve in den Puncten, in denen diese von C_m geschnitten wird, berührt, und da nun für jeden dieser Durchschnittspuncte die Indicatricen mit den betreffenden Berührenden von C_m zusammenfallen, so gilt der Satz:

> **Lehrsatz III.** *Die Indicatricen der Puncte einer Curve der m-ten Ordnung werden von einer Curve der $2m(n-1)$-ten Classe umhüllt, welche die Grundcurve in den Puncten berührt, wo diese von der Curve m-ter Ordnung geschnitten wird.*

a. **Besonderer Fall.** Für $m=1$ erhält man hieraus, dass die Indicatricen einer gegebenen Geraden von einer Curve der $2(n-1)$-ten Classe umhüllt werden, welche die Gerade selbst in $2(n-2)$ Puncten berührt. Die Gerade ist also die Indicatrix von $2(n-2)$ ihrer Puncte, wie wir dies schon in Nr. 112*b*. gefunden haben.

b. **Einhüllende der Indicatricen der Puncte der Curve von Hesse.** Gemäss dem allgemeinen Theoreme, das wir soeben bewiesen haben, werden die Indicatricen eines Punctes p, der sich auf der Curve von *Hesse* bewegt, die von der Ordnung $3(n-2)$ ist, von einer Curve der $6(n-1)(n-2)$-ten Classe umhüllt. Da aber in diesem Falle für jede Lage von p nach Nr. 90*c*. die beiden Indicatricen in eine Gerade zu-

sammenfallen, so reduciert sich die Classe der Einhüllenden auf $3(n-1)(n-2)$, ein Resultat, das wir schon an andern Orten, in Nr. 91*b*. und Nr. 112*a*., erhielten.

Von jedem beliebigen Puncte i laszen sich $3(n-1)(n-2)$ Tangenten an diese Curve legen, so dasz also jeder der $3(n-1)(n-2)$ Puncte p der Curve von *Hesse*, deren Indicatricen die ebengenannten Tangenten sind, je zwei Durchschnittspuncte der Curve von *Hesse* mit der oben in Nr. 113. bestimmten Curve L^{ii} repräsentieren.

Verbinden wir diese Eigenschaft mit den andern schon in Nr. 113. bewiesenen, so können wir folgenden Satz aussprechen:

> Lehrsatz IV. *Ist i ein gegebener Punct, so ist der Ort eines Punctes p, welcher derart bestimmt ist, dass die Gerade pi Tangente der conischen Polare von p ist, eine Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung, die zweimal durch i geht, und die Fundamentalcurve, die Curve von Hesse und die zweite Polare in allen Puncten berührt, die sie mit denselben gemein hat.*

115. **Ort eines Punctes, deszen Indicatrix eine gegebene Curve berührt.** Wir suchen jetzt die Ordnung des Ortes eines Punctes p zu bestimmen, deszen eine Indicatrix Tangente einer Curve K_r der r-ten Classe ist, das heiszt, wir untersuchen, wieviel Puncte einer Geraden R eine Indicatrix habe, welche K_r berührt.

Bewegt sich der Punct p in der Geraden R, so werden nach Nr. 114*a*. seine Indicatricen von einer Curve der $2(n-1)$-ten Classe umhüllt, die $2r(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten mit der gegebenen Curve K_r hat. Der gesuchte Ort ist also von der Ordnung $2r(n-1)$.

Betrachten wir eine gemeinschaftliche Tangente von K_r und C_n, so sind im Berührungspuncte mit der letztern zwei Puncte p vereinigt, für welche die Tangente die Indicatrix repräsentiert. Daraus folgert sich, dasz der gesuchte Ort die Fundamentalcurve in den $r.n(n-1)$ Puncten berührt, in denen diese von den mit K_r gemeinschaftlichen Tangenten berührt wird, oder, was dasselbe sagen will, in den Puncten, in denen die

Fundamentalcurve von der ersten Polare von K_r geschnitten wird. M. s. Nr. 104 *d*.

Die Curve K_r hat $3r(n-1)(n-2)$ gemeinschaftliche Tangenten mit der Einhüllenden der Indicatricen der Puncte der Curve von *Hesse*, es ist daher $3r(n-1)(n-2)$ die Zahl der gemeinschaftlichen Puncte der Curve von *Hesse* und des Ortes der $2r(n-1)$-ten Ordnung, den wir betrachteten. Folglich gilt der Satz:

Lehrsatz V. *Der Ort eines Punctes, von dem ausgehend eine der Tangenten seiner conischen Polare auch Tangente einer gegebenen Curve der r-ten Classe wird, ist eine Curve der $2r(n-1)$-ten Ordnung, welche die Fundamentalcurve und die Curve von Hesse in allen den Puncten berührt, die sie mit ihnen gemein hat.*

116. Ort eines variablen Punctes von der Beschaffenheit, dasz durch Verbindung desselben mit zwei festen Puncten in Bezug auf seine conische Polare zwei reciproke Polaren entstehen. Wir suchen, indem zwei feste Puncte i und j gegeben sind, den Ort eines Punctes, für welchen die Geraden pi und pj in Bezug auf die conische Polare von p die in Nr. 108. erklärten conjugierten Polaren bilden. Offenbar geht dieser Ort durch i und j.

Es sei R eine beliebige durch j gelegte Gerade und p ein Punct in R. Die geraden Polaren von p und i in Bezug auf die conische Polare von p treffen R in den Puncten a und b. Sobald letztere in einen Punct zusammenfallen, ist dieser der Pol von pi in Bezug auf den eben erwähnten Kegelschnitt, so dasz also dann p ein Punct des gesuchten Ortes ist. Nehmen wir einen beliebigen Punct a als Durchschnittspunct von R mit der ersten geraden Polare an, so gibt es $n-1$ entsprechende Lagen des Poles p, nämlich die Durchschnittspuncte von R mit der ersten Polare von a, und folglich auch ebensoviele Puncte b. Ist umgekehrt b der beliebige Durchschnitt der Geraden R mit der geraden Polare von i in Bezug auf eine unbestimmte conische Polare, so liegt nach Nr. 69 *b*. der Pol p dieser Geraden auf der ersten Polare von i in Bezug auf die erste Polare von b, das heiszt in einer Curve der $(n-2)$-ten Ordnung,

deren Durchschnittspuncte mit R die Lagen von p angeben, welche dem gegebenen Puncte b entsprechen. Es entsprechen daher jedem Puncte b $n-2$ Puncte a*). Die Zahl der Puncte p in R, für welche a und b zusammenfallen, ist daher $(n-1)+(n-2)$, und da auch j ein Punct der gesuchten Curve ist, so hat dieselbe die Ordnungszahl

$$(n-1)+(n-2)+1=2(n-1).$$

Wir werden dieselbe durch L^{ij} bezeichnen, weil sie, wenn i mit j zusammenfällt, mit der schon in Nr. 113. betrachteten Curve L^{ii} identisch wird.

Es sei p der Berührungspunct der Fundamentalcurve mit einer von i aus gezogenen Tangente, dann ist pi die gerade Polare von p, die gleichzeitig in p die Tangente der conischen Polare desselben Punctes p ist. Für jeden beliebigen Punct j geht daher die Gerade pj durch den Pol von pi, und p ist damit ein Punct der Curve L^{ij}, das heiszt, diese Curve enthält die $n(n-1)$ Berührungspuncte der Fundamentalcurve mit den an sie von i aus gelegten Tangenten. Derselben Schluszfolge gemäsz, musz sie auch durch die $n(n-1)$ Puncte beschrieben sein, in denen C_n von den durch j an diese Curve gelegten Tangenten berührt wird.

Untersuchen wir jetzt, in welchen Puncten die Curve L^{ij} die erste Polare von i in Bezug auf die erste Polare von j schneidet, welche wir kurz *die zweite gemischte Polare* der

*) Läszt man den Punct a sich auf R bewegen, so erzeugt die erste Polare von a nach Nr. 77. ein Curvenbüschel, deszen Curven auf R eine Involution des $(n-1)$-ten Grades bestimmen. Jedem Puncte p entspricht aber ein Punct b, folglich erzeugt, wenn wir a sich verändern laszen, die Gruppe der entsprechenden $n-1$ Puncte b auch eine Involution des $(n-1)$-ten Grades. Auch die erste Polare von b in Bezug auf die erste Polare des festen Punctes i gibt, wenn b auf der Geraden R sich bewegt, einem Curvenbüschel Entstehung, und es erzeugen demnach, wenn man b sich bewegen läszt, die Gruppen der entsprechenden $n-2$ Puncte a eine Involution des $(n-2)$-ten Grades. Laszen wir also a und b sich gleichzeitig verändern, so entstehen dadurch zwei projectivische Involutionen bezüglich vom $(n-2)$-ten und $(n-1)$-ten Grade. Die nach Nr. 24 b. diesen Involutionen *gemeinschaftlichen Puncte*, $2n-3$ an der Zahl, sind diejenigen, in welchen auszer in j die Gerade R den gesuchten geometrischen Ort schneidet.

Puncte *i* und *j* nennen wollen. Geht diese zweite gemischte Polare durch *p*, so geht nach Nr. 69*d*. die gerade Polare von *i* bezogen auf die conische Polare von *p* durch *j*, das heiszt, *i* und *j* sind in Bezug auf die conische Polare von *p* nach Nr. 108. *conjugierte Pole*. In diesem Falle genügt offenbar, damit die Geraden *pi* und *pj* für denselben Kegelschnitt reciproke Polaren darstellen, dasz die gerade Polare von *p* durch *i* oder *j* gehe, das heiszt, *p* musz sich entweder auf der ersten Polare von *i* oder auf der von *j* befinden. Die Curve L^{ij} geht daher durch die Puncte, in denen die zweite gemischte Polare der Puncte *i* und *j* von den ersten Polaren dieser einzelnen Puncte selbst geschnitten wird.

Es sei nun *p* und *o* zwei sich derart entsprechende Puncte der Curven von *Hesse* und *Steiner*, dasz die Gerade *po* durch *i* hindurchgeht. Um dann auszudrücken, dasz in Bezug auf die conische Polare von *p* die Geraden *pi* und *pj* reciproke Polaren sind, genügt es anzunehmen, das die geraden Polaren von *p* und *j* in Bezug auf den eben erwähnten Kegelschnitt sich in einem Puncte von *pi* schneiden. Nach Nr. 90*a*. ist aber im vorliegenden Falle die conische Polare von *p* nichts Anderes als ein Paar Gerade, die sich in *o* schneiden, so dasz also durch diesen Punct auch die Polaren von *p* und *j* in Bezug auf den eben erwähnten Kegelschnitt hindurchgehen. Da nun nach der Voraussetzung *pi* den Punct *o* enthält, so musz *p* der Curve L^{ij} angehören, und diese Curve geht also durch die $3(n-1)(n-2)$ Puncte der Curve von *Hesse*, deren Indicatricen sich in *i* schneiden. Dem entsprechend musz die Curve L^{ij} auch durch die $3(n-1)(n-2)$ Puncte der Curve von *Hesse* gehen, deren Indicatricen von *j* ausgehen. Daher der Satz:

Lehrsatz VI. *Gegeben zwei feste Puncte i und j. Der Ort eines Punctes p, für welchen die Geraden pi und pj in Bezug auf die conische Polare von p conjugiert sind, ist eine Curve der* $2(n-1)$*-ten Ordnung, welche*

1) *die Puncte i und j;*

2) *die Puncte, in denen die Fundamentalcurve von den Tangenten, die durch i und j gelegt werden können, berührt wird;*

3) *die Puncte in denen die ersten Polaren von i und j von Geraden berührt werden, die bezüglich durch j oder i gehen; endlich*

4) *die Puncte der Curve von Hesse enthält, deren Indicatricen sich entweder in i oder j schneiden.*

a. Anderer Ausdruck des Vorigen. Mit andern Worten, die Curve L^{ij} schneidet die Fundamentalcurve und die Curve von *Hesse* in den Puncten, in welchen diese von den Curven L^{ii} und L^{jj} berührt werden, welche auf die Nr. 113. auseinandergesetzte Weise einzeln von den Puncten i und j abhängen.

b. Büschel von Curven L^{ij}. Hält man den Punct i fest, während j sich auf einer Geraden R bewegt, so erzeugt die Curve L^{ij} ein Curvenbüschel. Sie geht nämlich, welchen Punct auch j bedeuten mag, durch folgende $4(n-1)^2$ feste Puncte, nämlich:

1) durch i;

2) durch die $n(n-1)$ Puncte, in denen C_n von den Tangenten, die durch i gehen, berührt wird;

3) durch die $3(n-1)(n-2)$ Puncte der Curve von *Hesse*, deren Indicatricen sich in i schneiden; endlich

4) durch die $2n-3$ Puncte, in welchen L^{ij} auszer in j, welcher Punct veränderlich ist, die Gerade R schneidet.

Diese letzteren Puncte verändern sich nämlich nicht, da sie nach der letzten Note auf Seite 181 die *gemeinschaftlichen Puncte* zweier projectivischer Involutionen darstellen, die vom Puncte j vollständig unabhängig sind.

Diese Eigenschaft kann man auch nachweisen, indem man die Zahl der Curven L^{ij} zu bestimmen sucht, welche durch einen gegebenen Punct q gehen, wenn i ein fester Punct ist und j sich auf einer festen Geraden R bewegen musz. Da die Geraden qi und qj in Bezug auf die conische Polare von q conjugiert sein müszen, so ist der Punct j der Durchschnitt von R mit der Geraden, welche q mit dem Pol von qi in Bezug auf den erwähnten Kegelschnitt verbindet. Durch q geht

also nur eine Curve L^{ij} von der verlangten Beschaffenheit. Die Gesammtheit aller dieser Curven bildet daher ein Büschel.

Auf dieselbe Art beweist man, dasz die Curven L^{ij}, welche, indem i als fest angenommen ist, durch denselben Punct q gehen, ein Büschel bilden, das heiszt, durch zwei gegebene Puncte q und q' geht für den festen Punct i nur eine Curve L^{ij} hindurch, u. s. w.

117. Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe. Die Untersuchungen der vorigen Nr. 116. kann man verallgemeinern, wenn man erstens an Stelle von j eine Einhüllende annimmt, oder zweitens auch noch an Stelle von i eine zweite Einhüllende, oder endlich drittens eine einzige Curve an Stelle des Systems der beiden Puncte.

Es sei zuerst eine Curve K_r der r-ten Classe und ein Punct i gegeben. Wir suchen dann den Ort eines Punctes p zu bestimmen, für den die Gerade pi in Bezug auf die conische Polare von p irgend einer der Tangenten conjugiert ist, die man von p an die Curve K_r legen kann, oder mit andern Worten, nach Nr. 110. den Ort des Punctes p, für den die Gerade pi durch irgend einen der Puncte geht, in denen die gerade Polare von p die reciproke Polare von K_r bezogen auf die conische Polare von p schneidet.

Die gesuchte Curve geht r-mal durch i, weil, wenn der Punct p mit i zusammenfällt, r Gerade pi der obigen Bedingung entsprechen, nämlich diejenigen, welche von i nach den r Puncten gezogen sind, in denen die gerade Polare von p die reciproke Polare von K_r bezogen auf die conische Polare von i trifft.

Ist p ein Punct von C_n, so ist die gerade Polare von p die Tangente der Fundamentalcurve im nämlichen Puncte. Berührt diese Gerade nun auch K_r, so ist p ein Punct der in Bezug auf die conische Polare von p reciproken Polare von K_r und da, was auch i sei, die Gerade pi durch p geht, das heiszt, durch den Durchschnittspunct der reciproken Polare von K_r mit der geraden Polare von p, so liegt dieser Punct auf dem gesuchten Orte. Der Ort enthält daher die sämmtlichen $r.n(n-1)$ Berührungspuncte der Grundcurve mit den ihr und der Curve K_r gemeinschaftlichen Tangenten.

Gehört p wiederum der Curve C_n an, ist aber pi die Tangente dieser Curve in p, so ist pi gleichzeitig auch die gerade Polare von p. Diese trifft die reciproke Polare von K_r in r Puncten, und p ist daher ein r-facher Punct der gesuchten Curve. Diese besitzt also im Ganzen $n(n-1)$ r-fache Puncte, nämlich diejenigen in denen C_n von Geraden, die durch i gehen, berührt wird.

Es sei ferner p ein Punct der Curve von *Hesse*, und o der entsprechende Punct der Curve von *Steiner*. Ist po Tangente der Curve K_r, so ist sie in Bezug auf die conische Polare von p der Geraden pi conjugiert; es gehen nämlich sowol diese Tangente, als die Polaren der Puncte p und i in Bezug auf den erwähnten Kegelschnitt durch o. Hieraus folgert sich, dasz p ein Punct der betrachteten Curve ist, das heiszt, dieser Ort geht durch die $3r(n-1)(n-2)$ Puncte der Curve von *Hesse*, deren Indicatricen K_r berühren.

Die Puncte p und o seien wieder correspondierende Puncte der Curven von *Hesse* und *Steiner*, aber po mag durch i gehend gedacht werden. Da nun die conische Polare von p in diesem Falle aus zwei Geraden besteht, die sich in o schneiden, so musz nach Nr. 110*a*. die reciproke Polare von K_r in Bezug auf diesen Kegelschnitt aus einem Büschel von r Geraden bestehen, die sich ebenfalls in o schneiden. Der Punct o repräsentiert daher je r Durchschnittspuncte der Geraden pi und der geraden Polare von p mit der reciproken Polare von K_r, und p ist also der Ort von r aufeinanderfolgenden gemeinschaftlichen Puncten der Curve von *Hesse* und der gesuchten Curve. Der geometrische Ort, um den es sich handelt, hat also eine r-punctige Berührung mit der Curve von *Hesse* in allen den $3(n-1)(n-2)$ Puncten, für welche die Indicatricen durch i gehen.

Wir wollen nun zuletzt noch die Ordnung der fraglichen Curve bestimmen. R sei eine beliebige durch i gelegte Gerade, und p ein Punct in R. Die gerade Polare von p treffe R in a, und die reciproke Polare von K_r in Bezug auf die conische Polare von p schneide R in r Puncten b. Nimmt man a beliebig an, so entsprechen dem $n-1$ Lagen von p, nämlich die Durchschnittspuncte von R mit der ersten Polare von a, und folglich $r(n-1)$ Lagen von b. Nehmen wir umgekehrt b beliebig als

Durchschnittspunct von R mit der reciproken Polare von K_r in Bezug auf die conische Polare eines beliebigen Poles an, so liegt nach Nr. 104*k*. dieser Pol auf der ersten Polare von K_r in Bezug auf die erste Polare von b. Da diese Curve nach Nr. 104*d*. von der $r(n-2)$-ten Ordnung ist, so schneidet sie R in ebensovielen Puncten p, und einem jeden von diesen entspricht ein Punct a. Jedem Puncte a entsprechen also $r(n-1)$ Puncte b, und jeder Punct b individualisiert $r(n-2)$ Puncte a; daher wird $[r(n-1)+r(n-2)]$-mal ein Punct a mit einem entsprechenden Puncte b zusammenfallen. Jedesmal aber, wenn dieses Zusammenfallen Statt hat, ist p ein Punct der Curve. Diese hat daher $r(2n-3)$ Puncte mit R gemein, auszer dem Puncte i, der ein r-facher Punct derselben ist. Der Ort hat daher die Ordnungszahl $2r(n-1)$. Alles zusammengenommen gibt den Satz:

Lehrsatz VII. *Der Ort eines Punctes, dessen Verbindungsgerade mit einem festen Puncte i in Bezug auf seine conische Polare einer der Tangenten conjugiert ist, die man von ihm an eine gegebene Curve r-ter Classe legen kann, ist eine Curve der $2r(n-1)$-ten Ordnung, welche*

1) *r-mal durch den festen Punct i;*

2) *ebenfalls r-mal durch die $n(n-1)$ Puncte geht, in denen die Fundamentalcurve von Geraden, welche durch i gehen, berührt wird;*

3) *die sämmtlichen $r.n(n-1)$ Puncte, in denen die Grundcurve von Tangenten der Curve r-ter Classe berührt wird;*

4) *ebenfalls die sämmtlichen $3r(n-1)(n-2)$ Puncte der Curve von Hesse enthält, deren Indicatricen die Curve r-ter Classe berühren; endlich*

5) *in den $3(n-1)(n-2)$ Puncten der Curve von Hesse, deren Indicatricen durch i gehen, mit dieser eine r-punctige Berührung eingeht.*

a. Weitere Verallgemeinerung. Dem Vorigen analog beweist man den folgenden Satz:

Lehrsatz VIII. *Der Ort eines Punctes, für welchen*

zwei von ihm an die Curven K_r und K_s bezüglich der r-ten und s-ten Classe gezogene Tangenten in Bezug auf die conische Polare des Punctes selbst conjugiert sind, ist eine Curve der $2r.s(n-1)$*-ten Ordnung, welche*

1) *s-mal durch jeden der* $r.n(n-1)$ *Puncte, in denen die Fundamentalcurve* C_n *von Tangenten der Curve* K_r *berührt wird;*

2) *r-mal durch jeden der* $s.n(n-1)$ *Puncte geht, in denen* C_n *von Tangenten der Curve* K_s *berührt wird;*

3) *mit der Curve von Hesse in jedem der* $3r(n-1)(n-2)$ *Puncte, deren Indicatricen* K_r *berühren eine s-punctige; und endlich*

4) *ebenfalls mit der Curve von Hesse in den* $3s(n-1)\times(n-2)$ *Puncten, deren Indicatricen* K_s *berühren, eine r-punctige Berührung eingeht.*

b. Eine andere Verallgemeinerung. Ist dagegen eine einzige Einhüllende K_r der r-ten Classe gegeben, so gilt der Satz:

Lehrsatz IX. *Der Ort eines Punctes p, für den zwei von ihm an eine Curve* K_r *gezogene Tangenten in Bezug auf die conische Polare von p conjugiert sind, ist eine Curve der* $r(r-1).n(n-1)$*-ten Ordnung, welche*

1) $(r-1)$*-mal durch jeden der* $r.n(n-1)$ *Puncte geht, in denen die Fundamentalcurve von Tangenten der Curve* K_r *berührt wird, und*

2) *mit der Curve von Hesse eine* $(r-1)$*-punctige Berührung in allen den* $3r(n-1)(n-2)$ *Puncten dieser Curve eingeht, deren Indicatricen* K_r *berühren.*

§. 20.

Einige Eigenschaften der Curven von Hesse und Steiner.

118. Die Curve von Steiner ist die Einhüllende der geraden Polaren der Curve von Hesse. Es sei *p*

ein Punct der *Hesse'schen* Curve und o der correspondierende Punct der Curve von *Steiner*. Die letzte Polare von p ist dann eine gerade Linie, die durch o geht, und deren Puncte Pole von ebensovielen ersten Polaren sind, welche von po in p berührt werden. Unter ihnen gibt es aber eine, die in p einen Doppelpunct hat, und zwar diejenige, deren Pol o ist. M. s. Nr. 88*d*., 90*a*., 112*a*.

a. Fortsetzung. Es seien o und o' zwei Puncte der Curve von *Steiner*, dann sind die Pole der Geraden oo' die $(n-1)^2$ Durchschnittspuncte der ersten Polaren dieser beiden Puncte, welche die entsprechenden Puncte p und p' der Curve von *Hesse* zu ihren respectiven Doppelpuncten haben. Nehmen wir den Punct o' dem Puncte o unendlich nahe an, das heiszt, die Gerade oo' als Tangente der Curve von *Steiner*, so hat diese Tangente einen Pol in p. Daraus folgt:

Lehrsatz I. *Die Tangenten der Curve von Steiner sind die geraden Polaren der Puncte der Curve von Hesse;*

oder auch nach Nr. 90*b*.:

Lehrsatz II. *Die Curve von Steiner ist die Einhüllende einer Geraden, die zwei zusammenfallende Pole besitzt.*

b. Classe der Curve von Steiner. Dies Theorem führt auf die Bestimmung der Classe der Curve von *Steiner*. Die Tangenten dieser Curve, welche durch einen beliebigen Punct i gehen, haben ihre Pole auf der ersten Polare von i. Diese schneidet die Curve von *Hesse* in $3(n-1)(n-2)$ Puncten. Es gilt also

Lehrsatz III. *Die Curve von Steiner ist von der $3(n-1)(n-2)$-ten Classe.*

c. Eigenschaften der Wendetangenten der Fundamentalcurve. Da die Wendepuncte der Fundamentalcurve C_n nach Nr. 100. Puncte der Curve von *Hesse* sind, so müszen die geraden Polaren derselben, das heiszt, die Wendetangenten von C_n auch Tangenten der Curve von *Steiner* sein.

Die Puncte der Curve von *Steiner*, welche den Wendepuncten C_n entsprechen, diese letztere als Puncte der Curve von *Hesse* betrachtet, liegen auf den Wendetangenten der Fundamentalcurve. Diese Tangenten berühren also auch die Curve der $3(n-1)(n-2)$-ten Classe, die nach Nr. 114*b*. die Einhüllende der Indicatricen der Puncte der Curve von *Hesse* ist.

d. Zahl der weiteren Singularitäten der Curve von Steiner. Dem allgemeinen Theoreme in Nr. 101. gemäsz ist die $(n-1)$-te Polare der Curve von *Hesse*, das heiszt, die Einhüllende der geraden Polaren der Puncte der Curve von *Hesse* eine Curve K der $3(n-1)(n-2)$-ten Classe und der $3(n-2)(5n-11)$-ten Ordnung, von welcher die Curve von *Steiner* einen Teil ausmacht.

Ist i der Durchschnittspunct zweier Tangenten der Curve von *Steiner*, so hat jede von ihnen einen Pol in der Curve von *Hesse* und durch diese beiden Pole geht die erste Polare von i. Fallen die beiden Tangenten in eine zusammen, so fallen auch die beiden Pole in einen Punct zusammen, in welchem daher die Curve von *Hesse* von der ersten Polare berührt wird. Dieser letzte Punct ist daher ein Punct der $(n-1)$-ten Polare der Curve von *Hesse*, letztere Curve als Ort der Pole aufgefaszt, deren erste Polaren diese Curve selbst berühren. Aber die Puncte i, die man derart definieren kann, dasz in ihnen zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Curve von *Steiner* zusammenfallen, sind auszer den Puncten dieser Curve selbst diejenigen, welche auf den Wendetangenten dieser Curve liegen. Die Curve K, das heiszt, die $(n-1)$-te Polare der Curve von *Hesse*, besteht daher aus der Curve von *Steiner* und den Wendetangenten derselben zusammengenommen. Daraus folgt:

Lehrsatz IV. *Die Curve von Steiner hat*

$$3(n-2)(5n-11)-3(n-2)^2=3(n-2)(4n-9)$$

Wendetangenten.

Von der Curve von *Seiner* kennen wir also die Ordnung gleich $3(n-2)^2$, die Classe gleich $3(n-1)(n-2)$ und die Zahl der Wendepuncte gleich $3(n-2)(4n-9)$. Unter Anwendung

der in den Nr. 99. und 100. bewiesenen Formeln von *Plücker* findet sich nun:

Lehrsatz V. *Die Curve von Steiner hat*

$12(n-2)(n-3)$ *Spitzen;*

$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ *Doppelpuncte;*

$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$ *Doppeltangenten.*

Fügt man der Zahl der Spitzen zweimal die Zahl der Wendepuncte, der Zahl der Doppeltangenten die Zahl der Wendetangenten und der Zahl der Doppelpuncte die Zahl der Puncte bei, in denen die Wendetangenten die Curve von *Steiner* und sich selbst schneiden, so erhält man bezüglich die Zahl der Spitzen, der Doppeltangenten und der Doppelpuncte der Gesammtcurve K der $3(n-2)(5n-11)$-ten Ordnung, der $(n-1)$-ten Polare der Curve von *Hesse*, in Uebereinstimmung mit den allgemeinen Resultaten der Nr. 103.

119. Die ersten Polaren der Puncte einer Doppeltangente der Curve von Steiner berühren sich in zwei Puncten. Es sei oo' eine Tangente der Curve von *Steiner*, o der Berührungspunct, p der entsprechende Punct der Curve von *Hesse*. Die ersten Polaren der Puncte von oo' bilden ein Curvenbüschel, deszen Curven sich sämmtlich in p berühren. Die gemeinschaftliche Tangente aller ist po. Unter den Curven dieses Büschels gibt es eine, die erste Polare von o, für welche p ein Doppelpunct ist, und es existieren auszerdem noch $3(n-2)^2-2$ Curven, nämlich die ersten Polaren der Puncte, in den oo' die Curve von *Steiner* schneidet, die anderswo einen Doppelpunct besitzen.

a. Fortsetzung. Ist nun oo' eine Doppeltangente der Curve von *Steiner*, o und o' die beiden Berührungspuncte, p und p' die entsprechenden Puncte der Curve von *Hesse*, so werden die ersten Polaren aller Puncte von oo' sich untereinander in den Puncten p und p' berühren. Unter Bezugnahme auf Nr. 118*d*. folgt hieraus:

Lehrsatz VI. *In einem geometrischen Netze von Curven $(n-1)$-ter Ordnung gibt es*

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$$

Büschel, deren Curven sich in je zwei verschiedenen Puncten berühren.

b. **Die ersten Polaren der Puncte einer Wendetangente der Curve von Steiner osculieren sich sämmtlich in einem Puncte.** Vereinigen sich in der Doppeltangente oo' die Berührungspuncte in einem einzigen o, so dasz dieselbe eine Wendetangente der Curve von *Steiner* wird, so fallen auch die Puncte p und p' in einen einzigen zusammen, und die ersten Polaren der Puncte von oo' werden in p unter sich eine dreipunctige Berührung eingehen; p ist dabei ein Doppelpunct der ersten Polare des Wendepunctes o.

Auszerdem berühren diese ersten Polaren in p die Curve von *Hesse*, weil nach Nr. 118*d*. die Wendetangenten der Curve von *Steiner* einen Teil des Ortes der Pole bilden, deren erste Polaren die Curve von *Hesse* berühren. Daraus folgt der Satz:

Lehrsatz VII. *Ist o ein Wendepunct der Curve von Steiner und p der Doppelpunct der ersten Polare von o, so ist po die Tangente der Curve von Hesse in p.*

Gleichzeitig ist auch bewiesen:

Lehrsatz VIII. *In einem geometrischen Netz von Curven $(n-1)$-ter Ordnung gibt es $3(n-2)(4n-9)$ Curvenbüschel, in deren jeden die Curven eine dreipunctige Berührung mit einander eingehen, das heisst, sich unter einander osculieren.*

120. Die Polaren der Doppelpuncte der Curven von Steiner haben zwei Doppelpuncte. Wir betrachten weiter eine erste Polare, die zwei Doppelpuncte p und p' besitzt, und bezeichnen den Pol derselben durch o. Durch o legen wir eine beliebige Gerade R, für welche die ersten Polaren ihrer Puncte ein Büschel bilden, der nach Nr. 88. $3(n-2)^2$ Doppelpuncte besitzt, das heiszt, die $3(n-2)^2$ Durchschnittspuncte von R mit der Curve von *Steiner* sind die Pole von ebensovielen ersten Polaren, die einen Doppelpunct besitzen. Da aber die erste Polare von o schon zwei Doppelpuncte hat,

so enthält das Büschel nur $3(n-2)^2-2$ andere Curven mit einem Doppelpuncte. Daraus folgt, dasz R die Curve von *Steiner* nur noch in $3(n-2)^2-2$ Puncten auszer in o trifft, dasz also o ein Doppelpunct der Curve von *Steiner* ist.

Nimmt R die Lage von P, der geraden Polare von p, an, so gehen die ersten Polaren aller ihrer Puncte sämmtlich durch p. Dieser Punct zählt also nach Nr. 88 *a.* für *zwei* der $3(n-2)^2$ Doppelpuncte des Büschels. Da also die Puncte p und p' soviel als *drei* Doppelpuncte sind, so enthält das Büschel nur noch $3(n-2)^2-3$ Curven mit einem Doppelpuncte, was nichts Anderes sagt, als dasz die Gerade P auszer o nur noch $3(n-2)^2-3$ Puncte mit der Curve von *Steiner* gemein hat. Dieser Punct gilt also für drei Durchschnittspuncte der Curve mit P. Dasselbe läszt sich natürlich für P', die gerade Polare von p', nachweisen.

Wir haben also den Satz:

Lehrsatz IX. *Hat eine erste Polare zwei Doppelpuncte p und p', so ist der Pol o ein Doppelpunct der Curve von Steiner, und die Tangenten dieses Doppelpunctes sind die geraden Polaren von p und p'.*

Nehmen wir noch auf die in Nr. 108 *d.* bestimmte Zahl der Doppelpuncte der Curve von *Steiner* Rücksicht, so folgert sich:

Lehrsatz X. *In einem geometrischen Netze der $(n-1)$-ten Ordnung gibt es*

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$$

Curven deren jede zwei Doppelpuncte besitzt).*

121. Die erste Polare einer Spitze der Curve von Steiner hat ebenfalls eine Spitze. Denken wir uns jetzt eine erste Polare mit einer Spitze p. Es sei o der Pol derselben. Eine beliebige durch o gelegte Gerade R bestimmt ein erstes Polarenbüschel, von deszen Curven eine in p eine Spitze hat. Die Zahl der Curven des Büschels mit einem Doppelpuncte ist also nach Nr. 88 *b.* noch $3(n-2)^2-2$, und R schnei-

*) *Steiner*, *a. a. O.* S. 4—5.

det daher die Curve von *Steiner* in zwei mit o zusammenfallenden Puncten.

Betrachtet man aber die gerade Polare P von p, so gehen die ersten Polaren aller Puncte dieser Geraden durch p, und unter ihnen gibt es nach Nr. 88*c.* nur $3(n-2)^2-3$, welche einen Doppelpunct besitzen. Der Punct o stellt also drei Durchschnittspuncte der Geraden P mit der Curve von *Steiner* vor, und es ist augenblicklich klar, dasz diese Eigenschaft ausschlieszlich der Geraden P zukommt.

Daraus folgt der Satz:

Lehrsatz XI. *Hat eine erste Polare in p eine Spitze, so ist der Pol o derselben eine Spitze der Curve von Steiner, welche in diesem Puncte die gerade Polare von p zur Rückkehrtangente hat*).*

Mit Bezug auf die in Nr. 118*d.* bestimmte Zahl der Spitzen der Curve von *Steiner* folgt weiter:

Lehrsatz XII. *In einem geometrischen Netze $(n-1)$-ter Ordnung gibt es $12(n-2)(n-3)$ Curven, deren jede eine Spitze hat.*

122. Die letzte Polare einer Curve berührt die Curve von Steiner in den entsprechenden Puncten der Durchschnittspuncte der gegebenen Curve mit der Curve von Hesse. Eine Curve C_m der m-ten Ordnung trifft die Curve von *Hesse* in $3m(n-2)$ Puncten; die geraden Polaren dieser Puncte sind nach Nr. 103*c.* und Nr. 108*a.* sowol Tangenten der $(n-1)$-ten Polare von C_m, als der Curve von *Steiner*. Es sei nun p einer der obigen Puncte und o der Punct, in welchem die gerade Polare von p die Curve von

*) *Steiner* bewies, dasz die Curve von *Steiner*, die er selbst *Kerncurve* nennt, $12(n-2)(n-3)$ Spitzen habe (*Crelles* Journal T. 47. S. 4). *Clebsch*, der dieselbe Zahl für die ersten Polaren erhielt, die eine Spitze haben, vermuthete deshalb, dasz die Pole dieser letzteren die Spitzen der Curve von *Steiner* bilden würden, und bewies diese Eigenschaft im Falle $n=4$. (*Ueber Curven vierter Ordnung*, *Crelle-Borchardt's* Journal, T. 59. Berlin, Reimer, 1861, S. 131).

Steiner berührt, so hat die erste Polare von o in p einen Doppelpunct, das heiszt, sie hat in ihm zwei zusammenfallende Puncte mit C_m gemein. Da nun die $(n-1)$-te Polare von C_m nach Nr. 103. der Ort der Pole der ersten Polaren ist, welche C_m berühren, so wird o ein Punct dieser $(n-1)$-ten Polare sein. Folglich gilt der Satz:

Lehrsatz XIII. *Die $(n-1)$-te Polare einer gegebenen Curve m-ter Ordnung berührt die Curve von Steiner in $3m(n-2)$ Puncten, die Pole von ebenso vielen ersten Polaren sind, deren Doppelpuncte aus den Durchschnittspuncten der gegebenen Curve mit der Curve von Hesse bestehend.*

Für $m=1$ entsteht hieraus:

Lehrsatz XIV. *Eine beliebige Gerade R schneidet die Curve von Hesse in $3(n-2)$ Puncten, die für ebensoviele erste Polaren Doppelpuncte bilden. Die Pole dieser ersten Polaren sind die Berührungspuncte der Curve von Steiner und der $(n-1)$-ten Polare von R.*

Es fällt nun sogleich in die Augen, dasz:

Wenn R eine gewöhnliche Tangente der Curve von *Hesse* ist, die $(n-1)$-te Polare von R mit der Curve von *Steiner* eine vierpunctige und $3n-8$ zweipunctige Berührungen hat; dasz ferner:

Wenn R eine Wendetangente der Curve von *Hesse* ist, die $(n-1)$-te Polare von R mit der Curve von *Steiner* eine sechspunctige und $3(n-3)$ zweipunctige Berührungen eingeht; dasz endlich:

Wenn R eine Doppeltangente der Curve von *Hesse* ist, die $(n-1)$-te Polare von R zwei vierpunctige und $3n-10$ zweipunctige Berührungen mit der Curve von *Steiner* besitzt.

§. 21.

Eigenschaften der zweiten Polaren.

123. Gemeine und gemischte zweite Polaren eines Punctes. Die erste Polare eines Punctes o in Bezug

auf die erste Polare eines andern Punctes o', oder was nach Nr. 69*c*. dasselbe sagt, die erste Polare von o' in Bezug auf die erste Polare von o haben wir in Nr. 116. der Kürze wegen die ***gemischte zweite Polare*** (***seconda polare mista***) der Puncte o und o' genannt. Nehmen wir auf diese Benennung Rücksicht, so können wir die zweite Polare von o, das heiszt, nach Nr. 69*b*. die erste Polare von o in Bezug auf die erste Polare von o auch als die ***gemeine zweite Polare*** (***seconda polare pura***) des Punctes o bezeichnen.

Geht nun die gemischte zweite Polare der Puncte o und o' durch den Punct a, so geht nach Nr. 69*d*. die gerade Polare von o in Bezug auf die conische Polare von a durch o'. Unter Beachtung von Nr. 108. folgt nun hieraus:

Lehrsatz I. *Die gemischte zweite Polare zweier Puncte o und o' ist der Ort der Puncte, für deren conische Polare die Puncte o und o' conjugierte Pole vorstellen.*

Daraus folgt, dasz, wenn wir in einer gegebenen Geraden R zwei Puncte o und o' annehmen, die in Bezug auf die conische Polare eines Punctes a conjugiert sind, die gemischte zweite Polare von o und o' durch a geht. Die Punctepaare auf R, die in Bezug auf den ebenerwähnten Kegelschnitt conjugiert sind, bilden eine quadratische Involution, deren Doppelpuncte e, f nach Nr. 108. durch die Durchschnittspuncte des Kegelschnitts mit der Geraden gebildet werden. Die Puncte e und f sind nun auszerdem Pole zweier gemeiner zweiter Polaren, die durch a gehen.

Hieraus folgt ferner, dasz es nötig, aber auch hinreichend ist, damit eine gemischte zweite Polare, deren Pole o und o' auf R liegen, durch a geht, wenn o und o' den Abschnitt ef harmonisch teilt, das heiszt: Sind o und o', e, f vier harmonische Puncte, so geht die gemischte zweite Polare von o und o' durch die Pole aller conischen Polaren, die die Puncte e und f enthalten. Nun liegt, sobald eine conische Polare durch zwei Puncte e und f geht, der Pol derselben nach Nr. 69*a*. auf der gemeinen zweiten Polare von e und also ebenso auch auf der von f. Die $(n-1)^2$ Durchschnittspuncte dieser beiden zweiten Polaren sind die Pole von ebensovielen conischen Polaren, die durch e und f gehen, sind also auch Puncte, die allen ge-

mischten zweiten Polaren gemein sind, die durch a gehen, und deren Pole auf R liegen. Daher

Lehrsatz II. *Die gemischten zweiten Polaren, die durch einen gegebenen Punct gehen und ihre Pole auf einer gegebenen Geraden haben, bilden ein Curvenbüschel der* $(n-2)$*-ten Ordnung.*

Soll eine gemischte zweite Polare, deren Pole auf R liegen, durch zwei Puncte a und b gehen, so ist sie vollständig und auf eine einzige Art bestimmt. Die Puncte von R nämlich, die zu zwei und zwei in Bezug auf die conische Polare von a einander conjugiert sind, bilden eine Involution. Eine zweite Involution entsteht auf dieselbe Weise durch den Punct b. Die gemeinschaftlichen conjugierten Puncte beider Involutionen (M. s. Nr. 25 *b*.) sind die Pole der gesuchten gemischten zweiten Polare.

Wir schlieszen weiter:

Lehrsatz III. *Die gemeinen und gemischten zweiten Polaren, deren Pole auf einer gegebenen Geraden liegen, bilden ein geometrisches Netz der* $(n-2)$*-ten Ordnung.*

Auszerdem bilden die gemeinen zweiten Polaren der Puncte der gegebenen Geraden eine Reihe vom Index 2, das heiszt, durch einen beliebigen Punct a gehen zwei gemeine zweite Polaren, deren Pole auf der gegebenen Graden — und auf der conischen Polare von a — liegen. Auch ist der Ort der Doppelpuncte der gemeinen und gemischten zweiten Polaren der Puncte der gegebenen Geraden, das heiszt die Curve von *Hesse* des oben erwähnten Netzes nach Nr. 92. eine Curve der $3(n-3)$-ten Ordnung.

124. Ort der Berührungspuncte der zweiten Polare einer Geraden mit den gemeinen zweiten Polaren ihrer Puncte. Wir haben soeben bemerkt, dasz durch zwei Puncte e und f der gegebenen Geraden R $(n-2)^2$ conische Polaren gehen, deren Pole die Durchschnittspuncte der gemeinen zweiten Polaren der Puncte von e und f sind. Nähern sich diese beiden Puncte ins Unendliche bis zum Zusammenfallen in einen einzigen f, so haben wir $(n-2)^2$ conische Po-

laren, die in f die Gerade R berühren, und ihre Pole werden die Durchschnittspuncte der gemeinen zweiten Polare von f mit der gemeinen zweiten Polare des diesem Puncte unendlich nahen Punctes von R sein, das heiszt, es werden ebensoviele Berührungspuncte der gemeinen zweiten Polare von f mit der zweiten Polare der gegebenen Geraden sein, daß ist nach Nr. 104. mit der Einhüllenden der gemeinen zweiten Polare der Puncte von R, oder dem Orte der Puncte der conischen Polaren, die R berühren.

Wir haben ferner bemerkt, dasz, wenn o, o', e, f vier harmonische Puncte von R sind, die gemischte zweite Polare von o und o' durch die $(n-2)^2$ Durchschnittspuncte der gemeinen zweiten Polaren von e und f geht. Nun fällt nach Nr. 4., vorausgesetzt, dasz e, f in einen einzigen Punct f zusammenfallen, auch einer der andern beiden Puncte, etwa o', mit f zusammen. Die gemischte zweite Polare zweier Puncte o und f von R geht daher durch die $(n-2)^2$ Puncte, in denen die gemeine zweite Polare von f die zweite Polare von R berührt. Folglich entststeht:

Lehrsatz IV. *Die Curve $2(n-2)$-ter Ordnung, zweite Polare einer gegebenen Geraden R, berührt in $(n-2)^2$ Puncten die gemeine zweite Polare eines beliebigen Punctes o von R. Die $2(n-2)^2$ Puncte, in denen die zweite Polare von R von den gemeinen zweiten Polaren zweier Puncte o und o' von R berührt wird, liegen alle auf ein und derselben Curve der $(n-2)$-ten Ordnung, nämlich auf der gemischten zweiten Polare der Puncte o und o'.*

a. Aehnlichkeit der Eigenschaften der zweiten Polaren einer Geraden mit denen eines Kegelschnittes. Aus Alle dem läszt sich herleiten, dasz die zweite Polare einer Geraden in Bezug auf die gemeinen und gemischten zweiten Polaren der Puncte dieser Geraden alle Eigenschaften und Relationen besitzt, die zwischen einem Kegelschnitt und den Geraden bestehen, die ihn berühren, oder schneiden.

b. Einhüllende einer Reihe vom Index 2. Dieses wichtige Resultat ist nicht ausschlieszliches Eigenthum der zweiten Polaren, sondern erstreckt sich auf ein beliebiges Netz.

In einem gegebenen geometrischen Curvennetze m-ter Ordnung gibt es eine unbegrenzte Zahl von Curven, die eine Reihe vom Index 2 bilden. Die Einhüllende der Reihe ist eine Curve, die jede eingehüllte Curve in den m^2 Puncten berührt, in der diese letztere die unmittelbar folgende Eingehüllte schneidet. Durch einen beliebigen Punct gehen aber nur zwei Eingehüllte, diese fallen also zusammen, wenn der Punct auf der Einhüllenden angenommen wird. Daraus folgt, dasz die Einhüllende eine Eingehüllte nicht treffen kann, ohne sie gleichzeitig zu berühren, und da also diese beiden Curven sich in m^2 Puncten berühren, so ist die Einhüllende der Curven der vorgelegten Reihe eine Curve der $2m$-ten Ordnung.

Alle Curven eines Netzes, die durch ein und denselben Punct gehen, bilden ein Büschel. Nun entstehen die Berührungspuncte der Einhüllenden mit einer Eingehüllten aus dem Durchschnitt dieser letzteren mit der unmittelbar folgenden Eingehüllten; diese Durchschnittspuncte bilden daher die Basis eines Curvenbüschels des Netzes. Alle Curven des Netzes also, die durch einen Punct gehen, in dem die Einhüllende Tangente an eine gegebene Eingehüllte ist, gehen auch durch die andere m^2-1 Berührungspuncte der Einhüllenden mit derselben Eingehüllten.

Durch zwei Puncte, in denen die Einhüllende von zwei verschiedenen Eingehüllten berührt wird, geht nur eine einzige Curve des Netzes. Eine beliebige Curve also, die wol dem Netze angehört, aber nicht der Reihe, schneidet die Einhüllende in $2m^2$ Puncten, in denen diese von zwei Curven der Reihe berührt wird.

c. Eigenschaften der Durchschnittspuncte der Curve von Hesse des Netzes mit der zweiten Polare von R. Wir kehren zu der zweiten Polare der Geraden R zurück. Die $(n-1)^2$ Berührungspuncte zwischen dieser Curve und der gemeinen zweiten Polare eines Punctes o von R bilden die Basis eines Curvenbüschels von gemischten zweiten Polaren, deren Pole o und ein variabler Punct auf R sind. Fallen zwei dieser Berübungspuncte in einen einzigen zusammen, so haben die Curven des Büschels in ihm die Tangente gemein, und für eine von ihnen ist nach Nr. 47. dieser Punct ein Dop-

pelpunct. Er gehört deshalb der Curve von *Hesse* des Netzes an, das nach Nr. 123. von den gemeinen und gemischten zweiten Polaren der Puncte von R gebildet wird. In jedem der $6(n-2)(n-3)$ Durchschnittspuncte dieser Curve von *Hesse* mit der zweiten Polare von R hat diese letzte Curve eine vierpunctige Berührung mit einer gemeinen zweiten Polare, deren Pol auf R liegt, und die dieselbe Curve noch in $(n-2)^2-2$ andern verschiedenen Puncten berührt.

125. Andere Erklärung der zweiten Polare einer Geraden. Die zweite Polare der Geraden R kann auch als Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven zweier projectivischer Curvenbüschel betrachtet werden. Es seien o und o' zwei feste Puncte und i ein variabler Punct auf R. Die gemischten zweiten Polaren respective der Puncte o, i und o', i schneiden sich in $(n-2)^2$ Puncten, die der zweiten Polare von R angehören, weil in ihnen nach Nr. 124. die Berührung dieser Curve mit der gemeinen zweiten Polare von i Statt hat. Läszt man i sich auf R bewegen, während o und o' fest bleiben, so erzeugen die eben erwähnten beiden gemischten zweiten Polaren zwei projectivische Curvenbüschel der $(n-2)$-ten Ordnung, und der Ort der Durchschnittspuncte zweier entsprechender Curven ist ist genau die zweite Polare von R.

Für die Puncte o und o' kann man offenbar zwei beliebige andere zu substituieren, wenn sie nur auf R liegen, da die $(n-2)^2$ Durchschnittspuncte der gemischten zweiten Polaren von o, i und o', i nach Nr. 77. nichts Anderes sind, als die Pole von R in Bezug auf die erste Polare von i. Hieraus ergibt sich folgende andere Definition (M. s. Nr. 86.):

Lehrsatz V. *Die zweite Polare einer Geraden ist der Ort der Pole dieser Geraden in Bezug auf die erste Polare eines variablen Punctes derselben Geraden**).

a. Gemeine und gemischte zweite Polaren einer Geraden. Diese Erklärung führt fast von selbst auf eine wichtige Verallgemeinerung. Wenn nämlich zwei Gerade R und R' gegeben sind, was ist dann der Ort der Pole der einen

*) Salmon. *Higher plane curves*, p. 152.

Geraden in Bezug auf die erste Polare eines Punctes, der sich auf der andern bewegt? Es seien in R' beliebig zwei Puncte o und o' fixiert, und auf R ein beliebiger Punct i angenommen, so schneiden sich die gemischten zweiten Polaren der Puncte o, i und o', i in $(n-2)^2$ Puncten, welche die Pole von R' in Bezug auf die erste Polare von i sind. Laszen wir i sich auf R bewegen, so erzeugen die erwähnten gemischten zweiten Polaren zwei projectivische Curvenbüschel $(n-2)$-ter Ordnung, und der Ort der Durchschnittspuncte zweier correspondierender Curven ist eine Curve der $2(n-2)$-ten Ordnung, die offenbar die gesuchte ist. Ihr kann man den Namen *gemischte zweite Polare* der Geraden R und R' geben, um sie von der *gemeinen zweiten Polare* von R, die wir oben definierten, zu unterscheiden.

b. Weitere Definition der gemischten zweiten Polare zweier Geraden. Wie die gemeine zweite Polare von R der Ort der Puncte ist, deren conische Polaren von R berührt werden, so gilt von der gemischten zweiten Polare zweier Geraden R und R' der Satz:

Lehrsatz VI. *Die gemischte zweite Polare zweier Geraden R und R' ist der Ort eines Punctes, in Bezug auf deszen conische Polare die Geraden R und R' einander conjugiert sind.*

Gehen nämlich sowol die zweite gemischte Polare von o und i, als die von o' und i durch den Punct a, so geht die gerade Polare von i in Bezug auf die conische Polare von a nach Nr. 123. durch o und o', das heiszt i ist der Pol von R' in Bezug auf diesen Kegelschnitt, w. z. b. w.

c. Eigenschaften des Durchschnittspunctes beider Geraden. Läszt man in den vorhergehenden Untersuchungen in *a.* den Punct i mit dem Durchschnittspuncte der Geraden R und R' zusammenfallen, so findet sich, dasz die gemischte zweite Polare dieser beiden Geraden durch die $(n-2)^2$ Puncte geht, in denen sich die gemischten zweiten Polaren der Puncte o, i und o', i schneiden, das heiszt nach Nr. 124. durch die $(n-2)^2$ Puncte, in denen die gemeine zweite Polare von i die gemeine zweite Polare von R' berührt. Folglich gilt der Satz:

Lehrsatz VII. *Die gemeine zweite Polare des Durch-*

schnittspunctes zweier Geraden berührt jede der gemeinen zweiten Polaren dieser Geraden in $(n-2)^2$ *Puncten. Diese* $2(n-2)^2$ *Berührungspuncte liegen alle auf der gemischten zweiten Polare derselben beiden Geraden.*

126. Die gemeinen und gemischten zweiten Polaren der Geraden, die durch einen Punct gehen, bilden ein Netz. Soll die gemischte zweite Polare zweier Geraden R und R', die sich in einem gegebenen Puncte t schneiden, durch einen andern vollständig gegebenen Punct o gehen, so ist es nach Nr. 125 *b.* notwendig, aber auch hinreichend, dasz diese beiden Geraden in Bezug auf die conische Polare von o conjugiert sind, das heiszt, dasz sie mit dem von t aus an die conische Polare von o gelegten Tangenten E und F ein harmonisches Stralenbüschel bilden. Bilden daher die Geraden R, R', E, F ein harmonisches Stralenbüschel, so geht die gemischte zweite Polare von R und R' durch die Pole aller conischen Polaren, die die Geraden E und F berühren. Nun liegt aber nach Nr. 104 *b.* und Nr. 124., wenn eine conische Polare diese beiden Geraden berührt, der Pol auf der gemeinen zweiten Polare dieser beiden Geraden. Die $4(n-2)^2$ Durchschnittspuncte dieser beiden Curven sind also die Pole von ebensovielen, dem Winkel EF eingeschriebenen conischen Polaren, sind also Puncte aller gemischten zweiten Polaren, welche den Punct o enthalten, der Geraden, welche durch t gehen. Diese gemischten zweiten Polaren bilden also ein Curvenbüschel.

Hieraus folgt, dasz durch zwei gegebene Puncte o und o' nur eine einzige gemischte zweite Polare von zwei Geraden geht — die aber nicht gegeben sind —, die durch einen gegebenen Punct t gehen. Daraus folgt:

Lehrsatz VIII. *Die gemeinen und gemischten zweiten Polaren von Geraden, die durch einen gegebenen Punct gehen, bilden ein geometrisches Curvennetz der* $2(n-2)$*-ten Ordnung.*

Von welchem Index ist die Reihe der gemeinen zweiten Polaren aller Geraden, die durch den gegebenen Punct t gehen? Wir untersuchen, wieviele dieser zweiten Polaren durch einen beliebigen Punct o gehen. Die Einhüllende der Geraden, deren

gemeine zweite Polare durch o gehen, ist nach Nr. 104g. die conische Polare desselben Punctes. An sie kann man von i zwei Tangenten legen. Durch i gehen daher auch nur zwei Gerade, deren gemeine zweite Polaren den Punct o enthalten. Daher der Satz:

Lehrsatz IX. *Die gemeinen zweiten Polaren der Geraden, die durch einen gegebenen Punct gehen, bilden eine Reihe vom Index* 2.

127. Die gemeine zweite Polare einer Geraden berührt die Curve von Hesse in allen Puncten, die sie mit ihr gemein hat. Es sei p ein der gemeinen zweiten Polare von R und der Curve von *Hesse* für die Fundamentalcurve C_n gemeinschaftlicher Punct. Betrachtet man denselben als der ersten Curve angehörig, so ist p der Pol einer conischen Polare die R berührt, und gehört er der Curve von *Hesse* an, so entspricht demselben Puncte als conische Polare ein Paar gerader Linien, die sich im entsprechenden Puncte o der Curve von *Steiner* schneiden. Es gibt also soviel Durchschnittspuncte der Curve von *Hesse* und der zweiten Polare von R, als es Durchschnittspuncte von R mit der Curve von *Steiner* gibt, das heiszt $3(n-2)^2$. Daraus folgt:

Lehrsatz X. *Die gemeine zweite Polare einer beliebigen Geraden berührt die Curve von Hesse in den* $3(n-2)^2$ *Puncten, die sie mit derselben gemein hat.*

Da die conische Polare von p durch zwei in o zusammenlaufende Gerade gebildet wird, so hat die Gerade R, die durch o geht, in Bezug auf diesen Kegelschnitt eine unbegrenzte Zahl von Polen die nach Nr. 110a. alle auf einer zweiten Geraden, die auch durch o geht, gelegen sind. Daher enthält eine Gerade R', die beliebig, aber nicht durch o gezogen ist, einen Pol von R in Bezug auf die conische Polare von p, das heiszt nach Nr. 125b., p ist ein Punct der gemischten zweiten Polare der Geraden R und R'. Daraus ergibt sich:

Lehrsatz XI. *Die* $6(n-2)^2$ *Puncte, in denen die Curve von Hesse von den zwei gemeinen zweiten Polaren zweier Geraden berührt wird, liegen sämmtlich auf der gemischten zweiten Polare dieser beiden Geraden.*

Die gemeinen zweiten Polaren der Geraden, die durch einen gegebenen zweiten Punct *i* gehen, bilden nach Nr. 126. eine Reihe der $2(n-2)$-ten Ordnung und vom Index 2, werden also nach Nr. 124*b*. von einer Curve der $4(n-2)$-ten Ordnung umhüllt. Diese Curve ist nach Nr. 125*c*. aus der Curve von *Hesse* und der gemeinen zweiten Polare des Punctes *i* zusammengesetzt, und die $8(n-2)^2$ Puncte, in denen die gemeinen zweiten Polaren zweier dieser Geraden die Curve von *Hesse* und die gemeine zweite Polare von *i* berühren, liegen sämmtlich auf der gemischten zweiten Polare derselben beiden Geraden.

a. Die Curve von Hesse berührt die zweite Polare des dem Berührungspuncte entsprechenden Punctes der Curve von Steiner. Wir haben bewiesen, dasz die gemeine zweite Polare von *R* die Curve von *Hesse* in *p* berührt. Auszerdem geht auch die gemeine zweite Polare von *o* durch *p*, so dasz dieser Punct für die erste Polare von *o* ein Doppelpunct ist. Andererseits berühren sich die gemeine zweite Polare von *o* und die gemeine zweite Polare von *R*, einer Geraden, die durch *o* geht, nach Nr. 124. in allen Puncten, in den sie sich treffen.. Daraus flieszt:

Lehrsatz XII. *Die Curve von Hesse berührt in einem beliebigen ihrer Puncte die gemeine zweite Polare des entsprechenden Punctes der Curve von Steiner.*

b. Eigenschaften der Tangenten der Curve von Hesse und Steiner in den Puncten *p* und *o*. Aus dem Vorhergehenden folgt, dasz die Tangente der Curve von *Hesse* in *p* nach Nr. 74*c*. der zu *po* in Bezug auf die beiden Geraden, welche die erste Polare von *o* im Doppelpuncte *p* berühren, zugeordnete harmonische Stral ist, und dasz, wenn die erste Polare von *o* in *p* eine Spitze hat, in ihm die Rückkehrtangente auch die Curve von *Hesse* berührt.

Dem analog ist die Tangente der Curve von *Steiner* in *o* der zu *po* in Bezug auf die beiden Geraden, welche die conische Polare von *p* bilden, zugeordnete harmonische Stral.

c. Weitere Eigenschaften des Punctes *p*. Be-

trachtet man eine zweite durch o gelegte Gerade R', so wird die gemeine zweite Polare dieser Geraden die Curve von *Hesse* ebenfalls im Puncte p berühren. Umgekehrt: die Geraden, deren gemeine zweite Polaren durch p gehen, sind nach Nr. 104g. die Tangenten der conischen Polare von p; aber dieser Kegelschnitt löst sich in zwei durch o gelegte Gerade auf, so dasz alle Gerade, deren gemeine zweite Polaren durch p gehen, den Punct o enthalten.

Die Curve von *Hesse* wird daher in p sowol von der gemeinen zweiten Polare von o als den gemeinen und gemischten zweiten Polaren aller Geraden berührt, die durch o gehen.

d. Die Gerade R als Tangente der Curve von Steiner. Wie die Berührungspuncte der Curve von *Hesse* mit der gemeinen zweiten Polare einer Geraden R den Durchschnittspuncten von R mit der Curve von *Steiner* entsprechen, so wird, wenn R diese letztere Curve im Puncte o berührt, die gemeine zweite Polare von R eine vierpunctige Berührung mit der Curve von *Hesse* im entsprechenden Puncte p eingehen und dieselbe auszerdem noch in $3(n-2)^2-2$ andern Puncten einfach berühren.

Die Tangenten an die conische Polare eines Punctes i sind nach Nr. 104g. die einzigen Geraden, denen gemeine zweite Polaren entsprechen, die durch i gehen. Dieser Kegelschnitt hat aber $6(n-1)(n-2)$ Tangenten mit der Curve von *Steiner* gemein, so dasz die Reihe der gemeinen zweiten Polaren — von Geraden —, die eine vierpunctige Berührung mit der Curve von *Hesse* eingehen, vom Index $6(n-1)(n-2)$ ist.

Ist R eine Doppeltangente der Curve von *Steiner*, so hat die gemeine zweite Polare von R mit der Curve von *Hesse* zwei vierpunctige und $3(n-2)^2-4$ zweipunctige Berührungen.

Ist endlich R eine Wendetangente der Curve von *Steiner*, so hat die gemeine zweite Polare von R mit der Curve von *Hesse* eine sechspunctige und auszerdem $3(n-2)^2-3$ zweipunctige Berührungen.

128. Gerade Linien, deren zweite Polaren einen Doppelpunct besitzen. Wie sind die Geraden beschaffen,

deren gemeine zweite Polaren einen Doppelpunct besitzen? Da die gemeine zweite Polare einer Geraden R der Ort der Pole ist, deren conische Polaren R berühren, so ist es, wenn die zweite Polare einen Doppelpunct haben soll, notwendig, dasz die conische Polare mit R mehr als zwei Puncte gemein habe, das heiszt, dasz sie eine conische Polare sei, die sich in zwei gerade Linien auflöst, deren eine R ist. Daraus folgt:

Lehrsatz XIII. *Die Geraden, deren gemeine zweite Polaren mit einem Doppelpuncte entsprechen, sind diejenigen, welche zu zwei und zwei die conischen Polaren der Puncte der Curve von Hesse darstellen. Die Doppelpuncte der gemeinen zweiten Polaren dieser Geraden sind eben diese Puncte der Curve von Hesse.*

Die gemeine zweite Polare eines beliebigen Punctes i schneidet die Curve von *Hesse* in $3(n-2)^2$ Puncten, den Polen von ebensovielen conischen Polaren, die durch i gehen, deren jede aus dem System zweier Geraden besteht. Daraus folgt:

Lehrsatz XIV. *Die Geraden, welche die conischen Polaren der Puncte der Curve von Hesse darstellen, werden von einer Curve der $3(n-2)^2$-ten Classe umhüllt.*

129. Ort eines Punctes, deszen conische Polare in ein einem gegebenen Kegelschnitt conjugiertes Dreiseit eingeschrieben ist. Die gemischte zweite Polare zweier Geraden R und R' ist der Ort der Puncte, für welche die Tangenten, die man an ihre conische Polare vom Puncte $R \cdot R'$ aus legen kann, mit diesen Geraden harmonische Stralenbüschel bilden. Solche conische Polaren erzeugen eine Reihe vom Index $2(n-2)^2$, da dieses die Zahl der Puncte ist, in denen die erwähnte gemischte zweite Polare von der gemeinen zweiten Polare eines beliebigen Punctes geschnitten wird. Nach Nr. 85. gibt es also unter diesen Kegelschnitten $4(n-2)^2$, die eine beliebige Gerade berühren.

Nun sei ein beliebiger Kegelschnitt C gegeben, und man verlange, den Ort eines Punctes zu bestimmen, deszen conische Polare in ein der Curve C conjugiertes Dreiseit eingeschrieben sei. Es sei a ein beliebiger Punct, und A die gerade Polare

von a in Bezug auf C. Es gibt nun $4(n-2)^2$ conische Polaren, die A und zwei sich in a schneidende Gerade berühren, die in Bezug auf C einander conjugiert sind, das heiszt $4(n-2)^2$ conische Polaren, die zu C conjugierten Dreiseiten eingeschrieben sind, deren eine Seite A ist. Die conischen Polaren die A berühren, haben aber ihre Pole auf der gemeinen zweiten Polare von A, so dasz daher der gesuchte Ort $4(n-2)^2$ Puncte mit der gemeinen zweiten Polare einer beliebigen Geraden gemein hat. Das heiszt, er ist eine Curve der $2(n-2)$-ten Ordnung.

Hat ein dem Kegelschnitt C conjugiertes Dreiseit einen Scheitel o auf dieser Curve, so fallen zwei Seiten mit der Tangente zusammen, und die dritte ist eine beliebige durch o gelegte Gerade. Gehört dieser Punct o der Curve von *Steiner* an, das heiszt, ist o der Doppelpunct der conischen Polare eines Punctes p der Curve von *Hesse*, so kann dieser Kegelschnitt als in dieses Dreiseit eingeschrieben betrachtet werden. Folglich entsteht:

Lehrsatz XV. *Der Ort eines Punctes, dessen conische Polare in ein einem beliebigen gegebenen Kegelschnitt conjugiertes Dreiseit eingeschrieben ist, ist eine Curve der* $2(n-2)$*-ten Ordnung, welche die Curve von Hesse in den Puncten schneidet, die den Durchschnittspuncten der Curve von Steiner mit dem gegebenen Kegelschnitt entsprechen.*

Diese Curve der $2(n-2)$-ten Ordnung ist, wenn der gegebene Kugelschnitt in ein Paar gerade Linien degeneriert, nichts Anderes, als die gemischte zweite Polare eben dieser Geraden.

Einem jeden beliebigen Kegelschnitt entspricht daher eine bestimmte Curve der $2(n-2)$-ten Ordnung, und gemäsz dem Theorem in Nr. 111*f.* ist augenblicklich klar, dasz allen Kegelschnitten, die demselben Viereck umgeschrieben sind, ebensoviele Curven der $2(n-2)$-ten Ordnung entsprechen werden, die ein Curvenbüschel bilden.

Drittes Capitel.

Curven dritter Ordnung.

Curven dritter Ordnung.

§. 22.

Die Curven von Hesse und Cayley einer Curve dritter Ordnung.

130. Nähere Bestimmung der zu betrachtenden Curven dritter Ordnung. Wir wollen jetzt die im Vorhergehenden auseinandergesetzte allgemeine Theorie auf den Fall anwenden, dasz die Fundamentalcurve von der *dritten Ordnung*, also eine Curve C_3 sei, die wir ohne vielfache Puncte voraussetzen. Daraus folgt dann nach Nr. 70., dasz sie von der *sechsten Classe* ist, und nach Nr. 100., dasz sie *neun Wendepuncte* besitzt.

a. Gerade und conische Polare eines Punctes. Jede Gerade hat vier Pole. Jeder beliebige Punct ist nach Nr. 68. der Pol einer conischen und einer geraden Polare.

Durch zwei beliebig gewählte Puncte geht nach Nr. 77 *a.* nur eine einzige conische Polare. Alle conischen Polaren, die durch einen Punct o gehen, haben noch drei andere Puncte o_1, o_2, o_3 gemeinschaftlich, und ihre Pole liegen sämmtlich auf ein und derselben Geraden, welche die Polare eines jeden der vier Puncte o, o_1, o_2, o_3 ist.

Eine Gerade hat daher *vier* Pole, und zwar die Scheitel des Vierecks, das den conischen Polaren der Puncte dieser Geraden eingeschrieben ist.

Alle Gerade, die durch denselben Punct o gehen, haben

ihre Pole auf einem Kegelschnitte, der nach Nr. 69*a.* die conische Polare von *o* ist.

b. Gemischte zweite Polare zweier Puncte. Die gerade Polare eines Punctes *o'* in Bezug auf die conische Polare eines andern Punctes *o* fällt nach Nr. 69*c.* mit der geraden Polare von *o* in Bezug auf die conische Polare von *o'* zusammen. Daraus folgt, dasz, wenn man von *o* die Tangenten an die conische Polare von *o'* und von *o'* die Tangenten an die conische Polare von *o* legt, die vier Berührungspuncte in ein und derselben Geraden liegen, die nach Nr. 123. die *gemischte zweite Polare* der Puncte *o* und *o'* ist.

c. Die Fundamentalcurve ist von der sechsten Classe. Von einem beliebigen Puncte *o* der Ebene kann man im Allgemeinen sechs Tangenten an die gegebene Curve dritter Ordnung legen, da dieselbe eine Curve sechster Classe ist. Die sechs Berührungspuncte liegen alle auf der conischen Polare des Punctes *o*.

d. Der Punct *o* als Punct der Fundamentalcurve. Ist *o* aber ein Punct der Curve dritter Ordnung, so wird diese in ihm sowol von der geraden als von der conischen Polare desselben Punctes berührt. In diesem Falle gehen von *o* nur vier Gerade aus, welche die Curve dritter Ordnung in andern Puncten berühren. Die Berührungspuncte sind nach Nr. 71. die vier Durchschnittspuncte dieser Curve mit der conischen Polare von *o*.

131. Das anharmonische Verhältnisz der vier Tangenten, die man von einem Puncte der Fundamentalcurve an dieselbe legen kann, ist constant. Es sei *o* ein Punct der Curve dritter Ordnung, welche die conische Polare dieses Punctes auszer im Berührungspuncte *o* noch in *a, b, c, d* schneidet, so dasz also nach Nr. 130*d.* die Geraden *o*(*a, b, c, d*) die Tangenten der Curve dritter Ordnung in den Puncten *a, b, c, d* sein werden.

Nach Nr. 30. wird eine Tangente von der unendlich nahen Tangente in ihrem Berührungspuncte geschnitten. Ist also *o'* der Punct der Grundcurve, der unmittelbar auf *o* folgt, so sind

die Geraden $o'(a, b, c, d)$ die vier Tangenten, die man durch o' legen kann. Da nun die conische Polare von o die Curve dritter Ordnung in o berührt und in a, b, c, d schneidet, so liegen die sechs Puncte o, o', a, b, c, d alle auf demselben Kegelschnitt, das heiszt nach Nr. 62., die beiden Büschel $o(a, b, c, d)$ und $o'(a, b, c, d)$ haben dasselbe Doppelverhältnisz. Damit ist bewiesen, dasz das anharmonische Verhältnisz der vier Tangenten, die man von einem Puncte o der Fundamentalcurve an dieselbe legen kann, sich nicht verändert, wenn man zum unmittelbar folgenden Puncte übergeht. Das gibt den Satz:

Lehrsatz I. *Das anharmonische Verhältnisz des Büschels der vier Tangenten, die man von einem beliebigen Puncte einer Curve dritter Ordnung an dieselbe legen kann, ist constant*).*

a. Die Durchschnittspuncte der Tangenten zweier Puncte der Fundamentalcurve liegen auf vier Kegelschnitten. Aus dem Vorhergehenden folgt, dasz, wenn $o(a, b, c, d)$ und $o'(a', b', c', d')$ die beiden Tangentenbüschel in Bezug auf zwei beliebige Puncte o und o' der Curve dritter Ordnung sind, die vier Puncte, in denen die Tangenten des ersten Büschels die entsprechenden Tangenten des zweiten Büschels schneiden, nach Nr. 62. auf einem Kegelschnitte liegen, der durch o und o' geht. Die Tangenten können sich nun aber auf vier verschiedene Weisen entsprechen, da nach Nr. 1. das Doppelverhältnisz des Büschels $o(a, b, c, d)$ mit denen des Büschels $o(b, a, d, c)$, $o(c, d, a, b)$, $o(d, c, b, a)$ identisch ist. Die sechszehn Puncte also, in denen die vier Tangenten durch o die vier Tangenten durch o' schneiden, liegen auf vier Kegelschnitten, die durch o und o' gehen.

b. Doppelverhältnisz einer Curve dritter Ordnung. Das *constante* anharmonische Verhältnisz der vier Tangenten, die von einem beliebigen Puncte einer Curve dritter Ordnung an diese gelegt werden können, kann man *Doppelverhältnisz der Curve dritter Ordnung* nennen.

---

*) Salmon, *Théorèmes sur les courbes de troisième degré.* (Crelles Journal, T. 42. Berlin. Reimer. 1851. S. 274.) — *Higher plane curves*, p. 151.

Eine Curve dritter Ordnung heiszt ***harmonisch***, wenn ihr anharmonisches Verhältnisz die ***negative Einheit*** ist, das heiszt, wenn die vier Tangenten, die von einem beliebigen Puncte der Curve an sie gelegt werden können, ein harmonisches Stralenbüschel bilden.

Eine Curve dritten Grades heiszt ***äquianharmonisch***, sobald das Doppelverhältnisz derselben eine imaginäre dritte Wurzel aus der ***negativen Einheit*** ist, das heiszt, wenn die vier durch einen ihrer Puncte gelegten Tangenten die drei ***anharmonischen Grundverhältnisse*** unter einander gleich haben (M. s. Nr. 27.).

132. Die Curven von Hesse und Steiner fallen zusammen. Besteht die conische Polare eines Punctes o aus ein Paar Geraden, die sich in o' schneiden, so ist umgekehrt nach Nr. 78. die conische Polare von o' ein Paar in o sich schneidender Geraden. Folglich ist der Ort der Doppelpuncte der conischen Polaren, die sich in Paare gerader Linien auflösen, auch der Ort ihrer Pole, das heiszt nach Nr. 88. und 90., die Curven von ***Steiner*** und von ***Hesse*** sind ein und dieselbe Curve der dritten Ordnung.

a. Einhüllende der Geraden oo'. Auszerdem wird, da die Gerade oo' der Ort zweier Geraden ist, welche die beiden Puncte o und o' der Curve von ***Hesse*** mit den entsprechenden Puncten o' und o der Curve von ***Steiner*** verbinden, die Einhüllende von oo', die dem allgemeinen Theoreme in Nr. 98*b*. gemäsz von der sechsten Classe sein soll, sich in unserm Falle auf die dritte Classe reducieren*).

b. Die Curve von Hesse eines Netzes zweiter Ordnung. Die Puncte o und o' sind nach Nr. 98*b*. ***conjugierte Pole*** in Bezug auf irgend eine conische Polare, welche ein geometrisches Netz zweiter Ordnung bilden. Daher entsteht:

Lehrsatz II. *Der Ort der Paare von Polen, die in Bezug auf die Curven eines Netzes von Kegelschnitten con-*

*) *Cayley*, *Mémoire sur les courbes du troisième ordre* (Journal de M. *Liouville*, août 1844, p. 290).

*jugiert sind, ist eine Curve der dritten Ordnung (Die Curve von Hesse des Netzes)**).

c. **Die Curve von Hesse als Einhüllende der geraden Polaren ihrer Puncte.** In der allgemeinen Theorie Nr. 118. und 127*a*. ist bewiesen, dasz die Curve von *Steiner* in einem beliebigen Puncte von der geraden Polare des entsprechenden Punctes der Curve von *Hesse* berührt wird, und dasz die zweite Polare eines Punctes der Curve von *Steiner* die Curve von *Hesse* im entsprechenden Puncte berührt. Im Falle der Curve dritter Ordnung fallen diese beiden Eigenschaften in eine zusammen, nämlich dahin, dasz die Tangente der Curve von *Hesse* in *o* die gerade Polare von *o'* ist. Daraus folgt:

Lehrsatz III. *Die Curve von Hesse ist die Einhüllende der graden Polaren ihrer Puncte.*

Dieser Lehrsatz läszt die sechs Tangenten bestimmen, die man von einem beliebigen Puncte *i* an die Curve von *Hesse* legen kann. Die geraden Polaren, die durch *i* gehen, haben nämlich ihre Pole auf der conischen Polare von *i*, welche die Curve von *Hesse* in sechs Puncten schneidet, deren jeder als gerade Polare eine Tangente der Curve von *Hesse* hat, die durch *i* geht. Natürlich liegen die Berührungspuncte dieser sechs Tangenten auf der conischen Polare von *i* nach der Curve von *Hesse* genommen.

133. **Tangenten der Curve von Hesse in zwei conjugierten Polen.** Es seien (Fig. 8) *o* und *o'* zwei in Bezug auf die conischen Polaren conjugierte Pole, dann ist die conische Polare von *o* das System zweier Geraden *ab* und *cd*, die sich in *o'* schneiden, und die conische Polare von *o'* wird aus zwei andern Geraden *ad* und *bc* gebildet, die sich in *o* schneiden. Schneiden sich diese beiden conischen Polaren gegenseitig in *a*, *b*, *c*, *d*, so sind dieselben nach Nr. 130*a*. die Pole der Geraden *oo'*, und die Geraden *ac* und *bd*, deren Durchschnittspunct *u* sei, bilden die conische Polare eines Punctes *u'*, der auf der Geraden *oo'* liegt. Die Puncte *u* und *u'* sind

*) *Hesse, Ueber die Wendepuncte u. s. w.* S. 105.

daher zwei neue conjugierte Pole, und u' ist der dritte Durchschnittspunct der Curve von *Hesse* mit oo'.

Nach Nr. 69*b*. fällt die gerade Polare von o' bezogen auf die Fundamentalcurve mit der Polare von o' in Bezug auf den Kegelschnitt zusammen, den die beiden Geraden ad und bc bilden. Folglich ist nach Nr. 132*c*. ou, die Tangente der Curve von *Hesse* im Puncte o, der zu oo' conjugierte harmonische Stral in Bezug auf ad und bc. Diese Eigenschaft kann man auch aus dem Theorem in Nr. 127*b*. herleiten. Dem analog ist $o'u$ die Tangente der Curve von *Hesse* in o'. Hieraus folgt:

Lehrsatz IV. *Die Tangenten der Curve von Hesse in zwei conjugierten Polen o und o' schneiden sich in einem Puncte dieser Curve, der der conjugierte Pol des dritten Durchschnittspunctes derselben Curve mit der Geraden oo' ist.*

a. Correspondierende Puncte einer Curve dritter Ordnung. Zwei Puncte einer Curve dritter Ordnung heiszen *correspondierende Puncte*, sobald sie denselben Tangentialpunct haben (m. s. Nr. 39*b*.), das heiszt, wenn die Tangenten in diesen Puncten die Curve in demselben Puncte schneiden.

Indem wir uns dieser Bezeichnung bedienen, können wir sagen, dasz zwei in Bezug auf ein Netz von Kegelschnitten conjugierte Pole correspondierende Puncte der Curve von *Hesse* dieses Netzes sind.

b. Curve von Cayley der Fundamentalcurve. Da die geraden Polaren von o und o' sich in u schneiden, so wird die conische Polare von u durch o und o' gehen. Da aber u ein Punct der Curve von *Hesse* ist, so besteht seine conische Polare aus der Geraden oo' und einer zweiten Geraden durch u'. Daraus folgt:

Lehrsatz V. *Eine Gerade, die zwei conjugierte Pole o und o' verbindet und folglich die Curve von Hesse in einem dritten Puncte u' schneidet, bildet einen Teil der conischen Polare des Punctes u, welcher der conjugierte Pol des Punctes u' ist.*

Die Geraden, welche die conischen Polaren der Puncte

der Curve von *Hesse* bilden, werden nach Nr. 128. von einer Curve dritter Classe umhüllt. Diese fällt nun mit der Einhüllenden der Geraden zusammen, welche zwei correspondierende Puncte der Curve von *Hesse* mit einander verbindet (M. s. Nr. 132*a.*).

Dieser Curve geben wir den Namen *Curve von Cayley* der gegebenen Curve dritter Ordnung, zu Ehren des berühmten *Cayley*, der in einer seiner elegantesten analytischen Abhandlungen die interessantesten Eigenschaften derselben zuerst auffand und bewies*).

c. Tangenten von einem Puncte der Hesseschen Curve an die von Cayley. Die Tangenten, die man von einem Puncte *o* der Curve von *Hesse* an die von *Cayley* legen kann, sind die Gerade, welche *o* mit seinem conjugierten Pole *o'* verbindet, und die beiden Geraden, welche die conische Polare von *o'* bilden.

d. Andere Erklärung der Curven von Hesse und Cayley. Sind *a, b, c, d* die vier Pole einer Geraden *R*, so bilden die Geradenpaare (*bc, ad*), (*ca, bd*), (*ab, cd*) drei conische Polaren, deren Pole auf *R* liegen. Die Durchschnittspuncte dieser drei Paare gerader Linien gehören also der Curve von *Hesse* an. Das gibt den Satz:

Lehrsatz VI. *Die Curve von Hesse ist der Ort der Diagonalpuncte, und die Curve von Cayley die Einhüllende der Seiten des vollständigen Vierecks, dessen vier Scheitel die Pole einer beliebigen Geraden bilden.*

134. Vierseite, deren Scheitel correspondierende Puncte der Curve von Hesse sind. Es seien *a, a'*; *b, b'* zwei Paare conjugierte Pole; *c* der Durchschnittspunct, der Geraden *ab* und *a'b'*; *c'* der der Geraden *ab'* und *a'b*. Dann sind *a, a', b, b', c, c'* die sechs Scheitel eines vollständigen Vierseits, und da nach der Voraussetzung die Endpuncte der beiden Diagonalen *aa'* und *bb'* in Bezug auf eine beliebige co-

*) *A Memoir on curves of the third order* (Philosophical Transactions, vol. 147, part 2, London 1857, p. 415—446).

nische Polare conjugierte Pole sind, so sind nach Nr. 109. auch die Puncte c und c' conjugierte Pole in Bezug auf das nämliche Netz Kegelschnitte. Daraus folgt:

Lehrsatz VII. *Sind a, b, c drei Puncte der Curve von Hesse in gerader Linie, so bilden die drei Pole a', b', c', die ihnen bezüglich conjugiert sind, ein Dreieck, dessen Seiten $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, respective durch a, b, c gehen.*

Hieraus ergibt sich, dasz, wenn zwei conjugierte Pole a und a' und ein dritter Punct b der Curve von *Hesse* gegeben sind, es, um den conjugierten Pol b' zu finden, genügt, die Geraden ba und ba' zu ziehen. Diese schneiden nämlich die Curve neuerdings in c und c', und der gemeinschaftliche Punct der Geraden ca' und $c'a$ ist dann der verlangte*).

a. Involution der Verbindungslinien conjugierter Pole mit einem Puncte der Curve von Hesse. Die Geraden, die man von einem beliebigen Puncte o der Curve von *Hesse* nach den conjugierten Polpaaren ziehen kann, bilden eine quadratische Involution. Schneidet nämlich eine beliebig durch o gelegte Gerade die Curve von *Hesse* in a und b, so liegen die conjugierten Pole a' und b' dieser Puncte ebenfalls mit o in gerader Linie. Die Geraden oab und $oa'b'$ sind also in der Art mit einander verbunden, dasz die eine die andere, und zwar nur auf eine Art bestimmt. Folglich u. s. w.

b. Umkehrung des Vorigen. Sind umgekehrt sechs Puncte a, a'; b, b'; c, c' gegeben, so ist der Ort eines Punctes o, für welchen die Paare von Geraden $o(a, a')$, $o(b, b')$, $o(c, c')$ in Involution stehen, eine Curve dritter Ordnung, für welche a und a', b und b', c und c' correspondierende Punctepaare vorstellen**).

135. Die Curve von Cayley als Ort der verbundenen Pole der Puncte der Curve von Hesse. Wenn zwei der vier Pole (*verbundene Pole*) einer Geraden in einen einzi-

*) *Maclaurin*, a. a. O., p. 224.

**) *Cayley*, *Mémoire sur les courbes du troisième ordre*, p. 287.

gen Punct o zusammenfallen, so gehört dieser Punct nach Nr. 90*b*. der Curve von *Hesse* an, und alle conischen Polaren, die durch ihn hindurchgehen, haben in ihm dieselbe Tangente oo'. Es seien nun (Fig. 8.) o_1 und o_2 die beiden andern Pole der geraden Polare ($o'u$) von o, das heiszt, es seien o_1 und o_2 die Puncte, in denen die Geraden (ad und bc), welche die conische Polare von o' bilden, die Gerade schneiden, welche durch u' geht und mit oo' zusammen nach Nr. 133*b*. die conische Polare von u bildet.

Zwei der Tangenten, welche nach Nr. 133*d*. von o_1 an die Curve von *Cayley* gelegt werden können, fallen mit o_1o zusammen, und die dritte ist o_1o_2. Ebenso fallen von den Tangenten, die man von o_2 an die *Cayleysche* Curve legen kann, zwei mit o_2o zusammen und die dritte ist o_2o_1. Folglich berühren nach Nr. 30. die Geraden oo_1 und oo_2 die Curve von *Cayley* in o_1 und o_2.

Hieraus folgt nach Nr. 106., dasz die Curve von *Cayley* der Ort der verbunden Pole der Puncte der Curve von *Hesse* ist. Das heiszt:

> Lehrsatz VIII. *Bewegt sich eine gerade Polare so, dass sie die Curve von Hesse einhüllt, so durchlaufen zwei ihrer Pole, die in einen Punct zusammenfallen, die Curve von Hesse selbst, und die beiden andern von einander verschiedenen Pole beschreiben die Curve von Cayley.*

a. Tangenten von einem Puncte der Curve von Hesse an die Curve von Cayley. Man bemerke noch, dasz von einem Puncte der Curve von *Hesse* drei Tangenten an die Curve von *Cayley* gezogen werden können, nämlich $o(o_1, o_2, o')$, und dasz von diesen die beiden oo_1 und oo_2 sich derart entsprechen, dasz die durch ihre Berührungspuncte gezogene Gerade o_1o_2 selbst eine Tangente der Curve von *Cayley* ist.

b. Die Curve von Cayley ist von der sechsten Ordnung. Diese Gerade, die durch u' geht und mit oo' die conische Polare von u bildet, schneidet die Curve von *Cayley* nicht blos in o_1 und o_2, den verbundenen Polen von o, sondern auch in o'_1 und o'_2, den verbundenen Polen von o'. Da nun

diese Gerade eine Tangente der Curve von *Cayley* ist, so folgt augenblicklich, dasz diese letzte Curve von der sechsten Ordnung ist.

Dies läszt sich auch noch auf folgende Weise zeigen. Durch einen Punct i laszen sich nach Nr. 132*c.* sechs Tangenten an die Curve von *Hesse* legen. Jede dieser Geraden hat zwei in einen Punct derselben Curve von *Hesse* zusammenfallende Pole, und folglich liegen die übrigen zwölf Pole auf der Curve von *Cayley*. Aber die Pole der Geraden, die durch i gehen, liegen alle auf der conischen Polare von i, diese schneidet also die Curve von *Cayley* in zwölf Puncten, woraus sich ergibt, dasz diese von der sechsten Ordnung sein musz.

c. **Harmonische Eigenschaft der Verbindungsgeraden zweier conjugierter Pole.** Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dasz, wenn oo_1 eine Tangente der Curve von *Cayley* ist, der Berührungspunct o_1 ein dem Puncte o der Curve von *Hesse* verbundener Pol ist, der in derselben Geraden liegt, ohne dasz jedoch auch sein correspondierender Punct o' in derselben sich befindet. Bezeichnen wir also durch o den Berührungspunct der Geraden oo' mit der Curve von *Cayley*, so ist o ein dem Puncte u' verbundener Pol.

Es sei n' der dritte Durchschnittspunct der Curve von *Hesse* mit uu', und es sei n der conjugierte Pol von n'. Die Gerade, welche durch n' geht und mit uu' die conische Polare von n bildet, schneidet dann oo' im Puncte o.

Nun geht die gerade Polare von n in Bezug auf die conische Polare von o durch o'; dieser Kegelschnitt ist daher ein Paar in o' sich schneidende Geraden. Aber die gerade Polare von n in Bezug auf die conische Polare von o fällt nach Nr. 130*b.* mit der geraden Polare von o in Bezug auf die conische Polare von n zusammen, das heiszt, in Bezug auf das System (uu', n'o). Der Pol o und die Puncte u', o, o', in denen die Gerade oo' den Kegelschnitt und die gerade Polare, die wir oben erwähnten, trifft, bilden also nach Nr. 110*a.* ein harmonisches Punctsystem. Daraus folgt:

Lehrsatz IX. *Die Gerade, die zwei conjugierte Pole verbindet, wird durch den dritten Durchschnittspunct mit*

der Curve von Hesse und den Berührungspunct der Curve von Cayley harmonisch geteilt *).

136. **Poloconica einer Geraden.** Die Einhüllende der geraden Polaren der Puncte einer gegebenen Geraden *R* ist ein Kegelschnitt, der auch nach Nr. 103. der Ort der Pole der conischen Polaren ist, die *R* berühren, oder auch nach Nr. 125. der Ort der Pole von *R* in Bezug auf die conischen Polaren der Puncte von *R*. Diesen Kegelschnitt, der der allgemeinen Theorie in Nr. 104. gemäsz die gemeine zweite Polare von *R* ist, werden wir im vorliegenden Falle kurz die *gemeine Poloconica* der Geraden *R* nennen.

a. **Weitere Definition der conischen Polare.** Die conische Polare eines Punctes *i* kann auszer als Ort der Puncte, deren gerade Polaren durch *i* gehen, nach Nr. 104*g*. auch als Einhüllende der Geraden definiert werden, deren Poloconiken durch *i* gehen.

b. **Neue Definition der Curven von Hesse und Cayley.** Die Geraden, deren Poloconiken einen Doppelpunct haben, stellen nach Nr. 148. die conischen Polaren der Puncte der Curve von *Hesse* vor, das heiszt, sind Tangenten der Curve von *Cayley*.

Wir betrachten wieder die Gerade *oo'* (Fig. 8) und wollen die Poloconica als Ort der Pole untersuchen, deren conische Polaren *oo'* berühren. Da die *oo'* ein Teil der conischen Polare von *u* ist, so musz nach Nr. 128. dieser Punct für die gesuchte Poloconica ein Doppelpunct sein. Auszerdem hat die conische Polare eines jeden der Puncte *o* und *o'* zwei zusammenfallende Puncte mit *oo'* gemein, so dasz folglich die Poloconica dieser Geraden durch das Paar gerade Linien *uo* und *uo'* dargestellt ist.

Hieraus, sehen wir, folgt also:

Lehrsatz X. *Die Curve von Hesse ist der Ort der Doppelpuncte der Poloconiken, die sich in zwei Gerade auf-*

*) *Cayley, A Memoir on curves etc.* p. 425.

*lösen, und ist gleichzeitig die Einhüllende dieser Geraden. Die Curve von Cayley hingegen ist die Einhüllende der Geraden, deren Poloconiken betrachtet wurden**).

c. Gemischte Poloconica zweier Geraden. Der Ort eines Punctes in Bezug auf deszen conische Polare zwei Gerade R und R' conjugiert sind, ist ein Kegelschnitt, — nach der allgemeinen Theorie die gemischte zweite Polare von R und R' —, den man *gemischte Poloconica* der Geraden R und R' nennen kann. Dieselbe ist auch nach Nr. 125*a.*, *b.* der Ort der Pole einer beliebigen dieser beiden Geraden in Bezug auf die conischen Polaren der Puncte der andern.

d. Fortsetzung. Die gerade Polare des Durchschnittspunctes zweier Geraden R und R' berührt die gemeinen Poloconiken dieser beiden Geraden in zwei Puncten, die nach Nr. 125*c.* auf der gemischten Poloconica dieser beiden Geraden liegen.

137. Jede Poloconica berührt die Curve von Hesse in drei Puncten. Nach Nr. 122. und Nr. 127. folgt:

Lehrsatz XI. *Wenn eine Gerade R die Curve von Hesse in den drei Puncten a, b, c schneidet, so berührt die Poloconica von R diese Curve in den drei conjugierten Polen a', b' c' dieser Puncte.*

Daraus folgt, dasz, wenn R eine gewöhnliche Tangente der Curve von *Hesse* mit dem Berührungspuncte a ist, und dieselbe nochmals einfach in b schneidet, die Poloconica von R mit der Curve von *Hesse* in a', dem conjugierten Pole von a, eine vierpunctige, und in b', dem conjugierten Pole von b, eine zweipunctige Berührung eingeht. Berührt aber R die Curve von *Hesse* in einem Wendepuncte a, so hat nach Nr. 127*d.* die Poloconica von R mit dieser Curve eine sechspunctige Berührung in a'.

a. Eigenschaften der Berührungspuncte. Die sechs Berührungspuncte der Curve von *Hesse* mit den gemeinen

*) *Cayley*, *A Memoir on curves etc.*, p. 432.

Poloconiken zweier Geraden liegen nach Nr. 127. sämmtlich auf der gemischten Poloconica beider Geraden. Daraus folgt:

Lehrstaz XII. *Schneiden zwei Gerade die Curve von Hesse in sechs Puncten, so liegen die conjugierten Pole dieser Geraden auf demselben Kegelschnitt*).*

Lehrsatz XIII. *Legt man durch die drei Puncte, in denen die Curve von Hesse von einer Poloconica berührt wird, einen beliebigen zweiten Kegelschnitt, so trifft dieser die Curve von Hesse in drei neuen Puncten, in denen dieselbe von einer zweiten Poloconica berührt wird.*

Wir sahen in Nr. 136*b*., dasz, wenn *o* und *o'* (Fig. 8) zwei conjugierte Pole sind, in denen die Curve von *Hesse* von Geraden berührt wird, die sich in *u* schneiden, diese beiden Geraden die gemeine Poloconica von *oo'* darstellen. Diese Poloconica berührt die Curve von *Hesse* in *u, o, o'*. Die letzten drei Puncte also und drei ihnen analoge liegen immer auf ein und demselben Kegelschnitt.

b. Conische Polare eines Punctes der Curve von Hesse in Bezug auf dieselbe Curve. Die vier Tangenten, die man von *u* aus nach vier andern Puncten der Curve von *Hesse* ziehen kann, bilden nach Nr. 136*b*. die beiden gemeinen Poloconiken der beiden Geraden, die in *u'* sich schneidend die conische Polare von *u* darstellen. Die Berührungspuncte dieser vier Geraden liegen auf einem Kegelschnitte, der nach Nr. 130*d*. die Curve von *Hesse* in *u* berührt, auszerdem liegen aber die Berührungspuncte der Curve von *Hesse* mit den gemeinen Poloconiken zweier Geraden auf der gemischten Poloconica dieser Geraden. Folglich erscheint der Satz:

Lehrsatz XIV. *Die conische Polare eines Punctes u der Curve von Hesse in Bezug auf diese nämliche Curve fällt mit der gemischten Poloconica der beiden Geraden*

*) Allgemeiner gilt nach Nr. 129. der Satz:

Schneidet ein Kegelschnitt die Curve von Hesse in sechs Puncten, so liegen die conjugierten Pole dieser Puncte auf einem zweiten Kegelschnitt.

zusammen, welche in Bezug auf die Fundamentalcurve die conische Polare von u darstellen.

138. **Beigeordneter Kegelschnitt.** Eine beliebige Transversale, die durch den festen Pol o gezogen ist, schneide die Fundamentalcurve dritter Ordnung in a_1, a_2, a_3 und die conische Polare von o in m_1 und m_2. Auf derselben Transversale suchen wir nun die beiden Puncte $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$, welche durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{o\mathfrak{m}_1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{om_1} - \frac{1}{om_2}\right), \\ \frac{1}{o\mathfrak{m}_2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{om_2} - \frac{1}{om_1}\right) \end{aligned}\right.$$

bestimmt werden, oder auch durch die quadratische Gleichung:

$$(2)$$
$$\frac{1}{\overline{o\mathfrak{m}}^2} - \frac{1}{o\mathfrak{m}}\left(\frac{1}{om_1} + \frac{1}{om_2}\right) + \frac{4}{om_1 . om_2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{om_1} + \frac{1}{om_2}\right)^2 = 0.$$

Nach den Relationen aber, die nach §. 3. zwischen drei Puncten a_1, a_2, a_3 und ihren harmonischen Mittelpuncten m_1 und m_2 bestehen, erhält man:

$$\frac{1}{om_1} + \frac{1}{om_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{oa_1} + \frac{1}{oa_2} + \frac{1}{oa_3}\right),$$
$$\frac{1}{om_1 . om_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{oa_2 . oa_3} + \frac{1}{oa_3 . oa_1} + \frac{1}{oa_1 . oa_2}\right),$$

so dasz die Gleichung (2) auch folgendermaszen geschrieben werden kann:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{o\mathfrak{m}} - \frac{1}{oa_1}\right)\left(\frac{1}{o\mathfrak{m}} + \frac{1}{oa_1} - \frac{1}{oa_2} - \frac{1}{oa_3}\right) \\ +&\left(\frac{1}{o\mathfrak{m}} - \frac{1}{oa_2}\right)\left(\frac{1}{o\mathfrak{m}} + \frac{1}{oa_2} - \frac{1}{oa_3} - \frac{1}{oa_1}\right) \\ +&\left(\frac{1}{o\mathfrak{m}} - \frac{1}{oa_3}\right)\left(\frac{1}{o\mathfrak{m}} + \frac{1}{oa_3} - \frac{1}{oa_1} - \frac{1}{oa_2}\right) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Laszen wir die Transversale sich um o drehen, so wird der Ort der Puncte m_1 und m_2 eine Curve zweiter Ordnung sein, die man den *beigeordneten Kegelschnitt* (conica satellite) des Poles o nennen kann*).

Fallen die Puncte a_2 und a_3 zusammen, das heiszt berührt die Transversale die Curve dritter Ordnung in a_2, und schneidet sie dieselbe in a_1, so erhält die Gleichung (3) offenbar den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{om} - \frac{1}{oa_1}$. Daraus folgt:

Lehrsatz XV. *Der beigeordnete Kegelschnitt enthält die sechs Puncte, in denen die Fundamentalcurve dritter Ordnung von den Tangenten, die man vom Pole aus an sie legen kann, geschnitten wird.*

Fallen die beiden Puncte m_1 und m_2 zusammen, das heiszt, berührt die Transversale die conische Polare von o in m_1, so zeigen die Gleichungen (1), dasz beide Puncte m_1 und m_2 mit m_1 zusammenfallen, das heiszt, die Transversale berührt in diesem Puncte auch den beigeordneten Kegelschnitt. Das gibt:

Lehrsatz XVI. *Der beigeordnete Kegelschnitt berührt die conische Polare in den Puncten, in welchen diese durch die gerade Polare geschnitten wird.*

a. Andere Erklärung der Curve von Hesse. Aus dem soeben Gegebenen und dem Theoreme in Nr. 39*b*. folgt, dasz, wenn o ein Punct der Curve von *Hesse* ist, das heiszt, wenn die conische Polare von o aus einem Paar geraden Linien, die sich in o' schneiden, besteht, auch der beigeordnete Kegelschnitt aus einem Paar Geraden besteht, die sich in demselben Puncte schneiden, und zwar aus dem Paar, das durch die beigeordneten Geraden derjenigen Geraden gebildet wird, die die conische Polare von o bilden.

Jede der beiden in o' zusammentreffenden Geraden, die einen Teil der conischen Polaren von o bilden, hat also nach Nr. 39*b*. als beigeordneten Punct den Punct o'. Daher entsteht:

---

*) Was liefert die analoge Untersuchung für eine Curve n-ter Ordnung? Sie musz auf eine *beigeordnete Curve* (curva satellite) der $(n-1)(n-2)$-ten Ordnung führen. Man sehe: *Salmon*, *Higher plane curves*, p. 68—69.

Lehrsatz XVII. *Die Curve von Hesse ist der Ort der Puncte, die den Geraden, welche die Curve von Cayley berühren, beigeordnet sind.*

b. Neue Erklärung der Curve von Cayley. Man erhält eine andere Erklärung der Curve von *Cayley*, wenn man beachtet, dasz (Fig. 8) der Punct u nach Nr. 133. der Tangentialpunct von o' — und auch von o — in Bezug auf die Curve von *Hesse* ist, und dasz, da die Geraden $o(a, b, u, u')$ ein harmonisches Stralenbüschel bilden, die Gerade oo' die gerade Polare von u' in Bezug auf die conische Polare von o' ist. Daraus folgt nämlich:

Lehrsatz VIII. *Die Curve von Cayley ist die Einhüllende der gemischten geraden zweiten Polaren zweier Puncte der Curve von Hesse, von denen der eine der Tangentialpunct des andern ist*).*

§. 23.

Büschel von Curven dritter Ordnung mit denselben Wendepuncten.

139. Harmonische Polare eines Wendepunctes einer Curve dritter Ordnung. Aus dem Theoreme in Nr. 71., auf eine Fundamentalcurve dritter Ordnung C_3 angewendet, folgt, dasz, wenn man durch einen festen Punct i dieser Curve eine beliebige Transversale legt, die sie in den beiden andern Puncten i_1 und i_2 schneidet, der Ort des in Bezug auf i_1 und i_2 conjugierten harmonischen Punctes von i die conische Polare von i ist.

Ist aber i ein Wendepunct der Fundamentalcurve, so zerlegt sich nach Nr. 80. die conische Polare in die Tangente des Wendepunctes und eine andere Gerade J, die nicht durch i geht. Daraus folgt:

Lehrsatz I. *Der Ort der conjugierten harmonischen Puncte eines Wendepunctes einer Curve dritter Ordnung*

---

*) *Cayley*, *A Memoir on curves etc.*, p. 439—442.

in Bezug auf die beiden Puncte, in denen dieselbe durch eine um den Wendepunct sich drehende Transversale geschnitten wird, ist eine Gerade).*

Die Gerade J, die die Fundamentalcurve nach Nr. 39*c.* in den drei Puncten schneidet, in denen diese von den durch den Wendepunct gelegten Tangenten berührt wird, nennt man ***harmonische Polare*** des Wendepunctes i. Man darf dieselbe jedoch nicht mit der gewöhnlichen ***geraden Polare*** verwechseln, die bekanntlich die Wendetangente ist.

a. Eigenschaften der harmonischen Polare. Durch den Wendepunct i ziehen wir zwei Transversalen, die die Curve der dritten Ordnung in den Puncten a, a' und b, b' schneiden. Da die harmonische Polare durch die conjugierten harmonischen Puncte von i in Bezug auf die Punctepaare a, a'; b, b' vollständig bestimmt ist, so ist sie nichts Anderes, als die Polare von i in Bezug auf die beiden Geraden $(ab, a'b')$, oder auch in Bezug auf das Paar $(ab', a'b)$. Nach Nr. 110*a.* geht deshalb die Gerade J durch den Durchschnittspunct der Geraden $(ab, a'b')$ und durch den der Geraden $(ab', a'b)$.

Fallen die beiden Transversalen zusammen, so erhält man die Eigenschaft, dasz, sobald man durch den Wendepunct i eine Transversale legt, die die Curve dritter Ordnung in a und b schneidet, die Tangenten in diesen Puncten sich auf der harmonischen Polare von i schneiden.

Aus Allem, was vorhergeht, ist augenblicklich klar, dasz ein Wendepunct einer Curve dritter Ordnung, in Bezug auf diese Curve und auf seine harmonische Polare dieselben Eigenschaften hat, die nach Nr. 107. ein beliebiger Punct in Bezug auf einen Kegelschnitt und seine gerade Polare besitzt**).

abis. Involution der Tangenten von einem Puncte von J an die gegebene Curve. Da zwei Tangenten der Curve dritter Ordnung, deren Berührungspuncte mit dem Wendepuncte i in gerader Linie liegen, sich in einem Puncte m der Geraden J schneiden und mit mi und derselben Geraden J

*) *Maclaurin*, *a. a. O.*, p. 228.

**) *Chasles*, *Aperçu historique*, p. 349.

ein harmonisches Stralenbüschel bilden, so sind die sechs Tangenten, die man von *m* an die Curve dritter Ordnung legen kann, in Involution, der Art, dasz die Berührungssehne zweier conjugierter Tangenten durch *i* geht, und die Doppelstralen der Involution *J* und *mi* sind.

b. Die Wendepuncte liegen zu drei und drei in gerader Linie. Wenn drei Gerade die gegebene Curve dritter Ordnung bezüglich in den Puncten *i*, *a*, *a'*; *j*, *b*, *b'*; *l*, *c*, *c'* schneiden, und wenn *i*, *j*, *l* und *a*, *b*, *c* in zwei geraden Linien liegen, so sind nach Nr. 39*a*. auch *a'*, *b'*, *c'* in gerader Linie. Angenommen die drei Puncte *i*, *j*, *l* fielen in einen einzigen Wendepunct *i* zusammen, so treffen sich die beiden Geraden *abc* und *a'b'c'*, wie soeben bewiesen, auf der harmonischen Polare von *i*. Fallen auszerdem die Puncte *a*, *b*, *c* in einen zusammen, so hat dasselbe für die Puncte *a'*, *b'*, *c'* Statt und folglich haben wir:

Lehrsatz II. *Die Gerade, die zwei Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung enthält, geht durch einen dritten Wendepunct*). Die Wendetangenten in zwei beliebigen dieser drei Wendepuncte treffen sich auf der harmonischen Polare des dritten.*

c. Eigenschaft der harmonischen Polaren. Aus dieser Eigenschaft und der Definition der harmonischen Polare eines Wendepunctes ergibt sich, dasz, wenn 1, 2, 3 drei Wendepuncte in gerader Linie sind, der conjugierte harmonische Punct von 1 in Bezug auf die Puncte 2, 3 auf der harmonischen Polare von 1 liegt, und dem analog für die übrigen; dasz daher die harmonischen Polaren der Wendepuncte 1, 2, 3 nach Nr. 76. die drei Geraden sind, welche die Scheitel des durch die drei Wendetangenten gebildeten Dreiseits mit dem Pol der Geraden 123 in Bezug auf dasselbe Dreiseit als Fundamentalcurve verbinden.

d. Fortsetzung. Den hieraus sich ergebenden Satz:

Lehrsatz III. *Liegen drei Wendepuncte* 1, 2, 3 *einer*

---

*) *Maclaurin*, *a. a. O.*, p. 231.

Curve dritter Ordnung in gerader Linie, so schneiden sich die drei harmonischen Polaren J_1, J_2, J_3 in demselben Puncte,

kann man auch folgendermaszen beweisen. Es seien J_1', J_2', J_3' die Wendetangenten der Fundamentalcurve in den drei genannten Wendepuncten. Die Paare von Geraden J_1, J_1'; J_2, J_2'; J_3, J_3' sind die conischen Polaren eben dieser drei Puncte, und diese Kegelschnitte müszen nach Nr. 130*a*. demselben Viereck umgeschrieben sein, deszen Scheitel die Pole der Geraden 123 sind. Das heiszt, die Geraden J_3, J_3' müszen durch die vier Puncte $J_1'\cdot J_2$, $J_1'\cdot J_2'$, $J_1\cdot J_2$, $J_1\cdot J_2'$ gehen. Die Tangenten in zwei der Wendepuncte 1, 2, 3 treffen sich aber auf der harmonischen Polare des dritten, das heiszt, J_3 geht durch den Punct $J_1'\cdot J_2'$, und folglich geht J_3 auch durch den Punct $J_1\cdot J_2$, w. z. b. w.

Hieraus folgt weiter:

Lehrsatz IV. *Die vier Pole einer Geraden, die drei Wendepuncte der Curve dritter Ordnung enthält, sind die Scheitel des Dreiseits, das durch die correspondierenden Wendetangenten gebildet wird, und der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der harmonischen Polaren der drei Wendepuncte*).*

e. Die Berührungspuncte der Tangenten von drei Puncten der harmonischen Polaren dreier Wendepuncte liegen auf einem Kegelschnitt. Es seien m_1, m_2, m_3 drei beliebig auf den respectiven harmonischen Polaren der drei Wendepuncte 1, 2, 3, die in gerader Linie liegen, angenommene Puncte. Durch jeden der Puncte m ziehe man zwei Tangenten an die Curve dritter Ordnung, so dasz die Berührungspuncte mit dem entsprechenden Wendepuncte in gerader Linie liegen, dann werden, da die drei Berührungssehnen die Curve in drei Puncten 1, 2, 3 in gerader Linie schneiden, die andern sechs Durchschnittspuncte, das heiszt, die sechs Berührungspuncte der sechs Tangenten nach Nr. 39*a*. auf einem Kegelschnitt liegen.

---

*) Plücker. *System der analytischen Geometrie*, S. 288.

140. Weitere Eigenschaft eines Wendepunctes. Drei durch einen Wendepunct i gelegte Transversalen mögen die gegebene Curve dritter Ordnung bezüglich in den Puncten a, a'; b, b'; c, c' schneiden, und die Gerade J, die harmonische Polare von i, in den Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ treffen, den conjugierten harmonischen Puncten von i in Bezug auf die Punctepaare a, a'; b, b'; c, c'. Eben diese Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liegen aber nach Nr. 139. auch auf der conischen Polare von i in Bezug auf eine beliebige durch die sieben Puncte i, a, a', b, b', c, c' gelegte Curve dritter Ordnung. Diese conische Polare löst sich deshalb in zwei Gerade auf, deren eine J ist. Das heiszt nach Nr. 80., i ist ein Wendepunct und J die betreffende harmonische Polare für jede beliebige Curve dritter Ordnung, die durch die obigen sieben Puncte beschrieben ist*).

a. **Sycigetisches Büschel von Curven dritter Ordnung.** Nach Nr. 100. hat eine Curve dritter Ordnung neun Wendepuncte, und zwar sind dies ihre Durchschnittspuncte mit der Curve von *Hesse*. Da nach Nr. 139*b*. die Gerade, die zwei Wendepuncte verbindet, durch einen dritten Wendepunct geht, so müszen durch jeden dieser neun Puncte vier Gerade gehen, die die acht übrigen enthalten. Daraus folgt mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Satz:

> **Lehrsatz V.** *Jede Curve dritter Ordnung, die durch die neun Wendepuncte einer gegebenen Curve dritter Ordnung beschrieben ist, hat in diesen Puncten ebenfalls ihre Wendepuncte***).

Die Curven dritter Ordnung, die die neun Wendepuncte gemein haben, heiszen *sycigetisch*.

b. **Durch die neun Wendepuncte gehen vier Systeme von drei Geraden.** Durch jeden Wendepunct der gegebenen Curve dritter Ordnung gehen nach dem Vorhergehenden vier Gerade, deren jede zwei andere Wendepuncte enthält, folglich ist die Zahl der Geraden, die je drei Wendepuncte

---

*) *Salmon*, *Lettre à M. A. L. Crelle* (*Crelles* Journal, T. 39. Berlin, Reimer, 1850, S. 365).

*) *Hesse*, *Ueber die Wendepuncte u. s. w.* S. 107.

enthalten, gleich $\frac{4 \times 9}{3} = 12$. Bezeichnen wir die Wendepuncte durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, so können wir diese Geraden folgendermaszen darstellen:

123,	148,	157,	169,
456,	259,	268,	358,
789;	367;	349;	247.

Hieraus ist ersichtlich, dasz diese zwölf Gerade sich in vier Gruppen sondern laszen, deren jede aus drei Geraden, die wir oben je in eine Verticale geschrieben haben, besteht und durch alle neun Wendepuncte hindurch geht. Durch die neun Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung gehen also vier Systeme von drei Graden*). Das gibt den Satz:

Lehrsatz VI. *In einem Büschel sycigetischer Curven dritter Ordnung gibt es vier Curven, deren jede sich in drei Gerade auflöst.*

Wir werden diese im Folgenden durch den Ausdruck *dreiseitige Curven dritter Ordnung* (*cubiche trilatere*) bezeichnen.

Da jedes System dreier Geraden als eine Curve dritter Ordnung mit drei Doppelpuncten angesehen werden kann, und auszerdem nach Nr. 80. ein Büschel von Curven dritter Ordnung zwölf Doppelpuncte enthält, so geht durch die neun Wendepuncte der gegebenen Curve dritter Ordnung auszer den vier Systemen von drei Geraden keine weitere Curve, die einen Doppelpunct oder eine Spitze enthielte.

141. **Berührungspuncte der Curve von Hesse mit den Wendetangenten der gegebenen Fundamentalcurve.** Wird der Wendepunct i der Fundamentalcurve als ein Punct der Curve von *Hesse* angesehen, das heiszt, als ein Punct, der als conische Polare ein Paar gerade Linien besitzt, die sich in einem andern Puncte i' schneiden, so ist der nach Nr. 136*b*. zu i conjugierte Pol i' der Durchschnittspunct der Wendetangente mit der harmonischen Polare. Nun schneiden sich im Allgemeinen nach Nr. 133. die Tangenten zweier

*) *Plücker*, *System der analytischen Geometrie*, S. 284.

conjugierter Pole der Curve von *Hesse* in einem Puncte dieser selben Curve; da auszerdem i auch für die Curve von *Hesse* nach Nr. 140*a*. ein Wendepunct ist, so hat diese Curve in diesem Puncte mit der Tangente eine dreipunctige Berührung, so dasz also die Tangente in i' die Curve von *Hesse* in i trifft, und daher die Gerade, welche Wendetangente der Fundamentalcurve im Wendepuncte i ist, auch gemeine Tangente der Curve von *Hesse* im conjugierten Pole i' ist*).

Diese Eigenschaft kann man auch aus der allgemeinen Theorie in Nr. 118*c*. und 119*b*. schlieszen, aus denen noch folgt, dasz alle conischen Polaren, die durch i' gehen, in ihm eine dreipunctige Berührung eingehen.

a. Gemeinschaftliche Tangenten der Curve von Hesse und der Grundcurve. Jede Wendetangente der Fundamentalcurve dritter Ordnung zählt, da sie gleichzeitig eine gewöhnliche Tangente der Curve von *Hesse* ist, als *zwei* gemeinschaftliche Tangenten. Die beiden Curven haben daher noch andere $6.6-2.9=18$ gemeinschaftliche Tangenten. Da jede Tangente der Curve von *Hesse* zwei Pole in dem zum Berührungspuncte conjugierten Pole vereinigt hat, und die beiden andern nicht zusammenfallenden Pole nach Nr. 135. auf der Curve von *Cayley*, so berühren die achtzehn gemeinschaftlichen Tangengenten der Curve von *Hesse* und der Fundamentalcurve dritter Ordnung diese letzte Curve in den Puncten, in denen sie von der Curve von *Cayley* geschnitten wird.

b. Berührungspuncte der Curve von Hesse und Cayley. Sind im Allgemeinen o und o' zwei conjugierte Pole, und u' der dritte Durchschnittspunct der Curve von *Hesse* mit der Geraden oo', so berührt diese nach Nr. 135*c*. die Curve von *Cayley* im conjugierten harmonischen Puncte o von u' in Bezug auf die beiden Puncte o und o'. Sobald aber o ein Wendepunct der Fundamentalcurve dritter Ordnung ist, so fällt u' mit o' zusammen und also nach Nr. 4. auch o mit o'. Folglich entsteht:

*) *Clebsch*, *Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung*. (*Crelle-Borchardt's* Journal, T. 58., Berlin, Reimer, 1861, S. 232).

Lehrsatz VII. *Die Curve von Cayley berührt die Curve von Hesse in den neun conjugierten Polen der Wendepuncte der Fundamentalcurve dritter Ordnung.*

c. Eigenschaft der harmonischen Polaren. Eine Tangente der Curve von *Cayley*, z. B. $u'r$ in Fig. 8., schneidet diese Curve in vier Puncten o_1, o_2, o'_1, o'_2, die nach Nr. 135. die Durchschnittspuncte von $u'r$ mit den Geraden sind, welche die conischen Polaren von o und o' bilden. Ist o ein Wendepunct der Fundamentalcurve, so besteht seine conische Polare aus der Wendetangente oo' und der harmonischen Polare, und diese Letztere fällt mit $u'r$ zusammen, das heiszt, u' und o' fallen aufeinander. Daraus folgt, dasz von den beiden Puncten o'_1 und o'_2 der eine auf o' (oder u') fällt, und der andere der Durchschnittspunct der beiden unendlich nahen Tangenten $u'r$ und $o'o'_1$ der Curve von *Cayley* ist, das heiszt der Berührungspunct dieser Curve mit der Geraden $u'r$. Diese Gerade hat also eine dreipunctige Berührung mit der Curve von *Cayley*, und da dieselbe von der dritten Classe und sechsten Ordnung ist, also nach Nr. 99. und 100. auszer neun Spitzen keine weitere Singularitäten haben kann, so folgt:

Lehrsatz VIII. *Die harmonischen Polaren der neun Wendepuncte der Fundamentalcurve dritter Ordnung berühren die Curve von Cayley in den neun Rückkehrpuncten dieser Curve.*

d. Reciprocität zwischen den Curven von Hesse und Cayley. Die Curve von *Hesse* und die von *Cayley* besitzen völlig *reciproke* Eigenschaften. Nämlich:

Eine beliebige Tangente der Curve von *Cayley* schneidet die Curve von *Hesse* in zwei *correspondierenden* Puncten, das heiszt in Puncten, welche denselben Tangentialpunct haben, und auszerdem in einem dritten Puncte, der der conjugierte harmonische Punct des Berührungspunctes der Curve von *Cayley* in Bezug auf die beiden ersten Puncte ist. (M. s. Nr. 135*c*.)

In einem jeden Puncte o der Curve von *Hesse* schneiden sich drei Tangenten der Curve von *Cayley*. Zwei derselben sind *correspondierende*, das heiszt, die Verbindungsgerade ihrer Berührungspuncte ist eine Tangente der Curve von *Cayley*. Die dritte ist der conjugierte harmonische Stral der Tangente der Curve von *Hesse* in o in Bezug auf die beiden ersten Tangenten. (M. s. Nr. 135*a*.)

Aus dieser vollkommenen Reciprocität folgt, dasz die Eigenschaften der Curve von *Cayley* aus denen der Curve von *Hesse* geschloszen werden können, und umgekehrt, z. B.:

Die neun Puncte i, in denen die Curve von *Hesse* von ihren Wendetangenten berührt wird, sind auch die Wendepuncte aller Curven der dritten Ordnung die durch dieselben neun Puncte gehen.

Zu diesem Curvenbüschel gehören vier Dreiseite, das heiszt, die neun Wendepuncte liegen zu drei und drei auf zwölf Geraden R verteilt, von denen sich in jedem der Puncte i vier schneiden.

Die Scheitel der vier Dreiseite sind die zwölf Puncte r*).

Zu den Curven dritter Ordnung, die dieselben Wendepuncten mit der Curve von *Hesse* gemein haben, gehört auch die Fundamentalcurve C_3, in Bezug auf welche die Curve von *Hesse* der Ort der Puncte ist, die als conische Polare ein Paar Gerade haben. Die Curve von *Cayley* ist die Einhüllende dieser Geraden.

Die Wendetangenten J' der Fundamentalcurve C_3 berühren die Curve von *Hesse* und *Cayley* in den Puncten i', in denen dieselben sich schneiden.

Die neun Geraden J, welche die Curve von *Cayley* in den Spitzen berühren, sind die Rückkehrtangenten für alle Curven dritter Classe, welche diese neun Geraden berühren.

Zu der Reihe dieser Curven gehören vier Dreiecke, das heiszt die neun Geraden J schneiden sich zu drei und drei in zwölf Puncten r, jede dieser Geraden enthält vier dieser Puncte.

Die Seiten dieser vier Dreiecke sind die zwölf Geraden R.

Zu den Curven dritter Classe, welche als Rückkehrtangenten die neun Geraden J besitzen, gehört eine K_3**), in Bezug auf welche die Curve von *Cayley* die Einhüllende einer Geraden ist, deren erste einhüllende Polare (m. s. Nr. 82.) aus einem Punctepaar besteht. Die Curve von *Hesse* ist der Ort dieser Puncte.

Die Spitzen der Curve K_3 sind die neun Puncte i', in denen die Curve von *Hesse* und die Curve von *Cayley* sich berühren.

142. Eigenschaften der sycigetischen Dreiecke. **Es sei ein Curvenbüschel dritter Ordnung gegeben. Eine beliebige Transversale schneidet die Curven desselben in je drei Puncten, die eine Involution dritten Grades bilden, und berührt**

*) Diese Eigenschaft wird sogleich in Nr. 142. bewiesen werden.

**) Eine Definition dieser Curve als Einhüllende einer variablen Geraden wäre wünschenswert.

nach Nr. 49. in den Doppelpuncten dieser Involution vier Curven des Büschels. Sind die Curven des Büschels sycigetische, das heiszt, haben sie die neun Wendepuncte gemeinschaftlich, und nimmt man als Transversale die harmonische Polare J eines Wendepunctes i an, so sind nach Nr. 139. die Durchschnittspuncte dieser Geraden mit einer beliebigen Curve des Büschels die Berührungspuncte der Tangenten dieser Curve, die sich in i schneiden. Es sei nun r einer der Doppelpuncte der Involution, so berührt die Curve des Büschels, die durch r geht, in ihm sowol die Transversale J als die Gerade ri, das heiszt sie wird in r einen Doppelpunct haben. Die einzigen Doppelpuncte eines sycigetischen Curvenbüschels dritter Ordnung sind aber nach Nr. 140*b*. die Durchschnittspuncte der Systeme von je drei Geraden, deren jede drei Wendepuncte enthält. Die Scheitel der vier sycegetischen Dreiseite, die durch diese Geraden gebildet werden, liegen daher zu je vier auf den harmonischen Polaren der Wendepuncte.

Daraus folgt, wenn r ein Scheitelpunct eines sycigetischen Dreiseits ist, dasz dieser Punct auf der harmonischen Polare eines jeden der drei Wendepuncte liegen musz, die auf seiner Gegenseite desselben Dreiecks liegen, und daraus ergibt sich:

Lehrsatz IX. *Die Durchschnittspuncte der harmonischen Polaren der Wendepuncte zu drei und drei sind die Scheitel der vier Dreiseite, welche durch die zwölf Geraden gebildet werden, auf denen zu drei und drei diese Wendepuncte verteilt liegen**).

Wir betrachten ein beliebiges dieser sycigetischen Dreiseite. Die Seiten desselben enthalten die neun Wendepuncte, und auszerdem gehen die neun harmonischen Polaren durch die Scheitel. Es sei nun r einer der Scheitel, und 1, 2, 3 die Wendepuncte, die auf der Gegenseite desselben liegen. Durch r gehen nun die harmonischen Polaren von 1, 2, 3, die nach Nr. 140. für alle sycigetischen Curven des Büschels einen Teil der conischen Polaren dieser Puncte bilden, und folglich wird nach Nr. 130*a*. für alle diese Curven die Gerade 123 die gerade Polare des Punctes r vorstellen. Daraus folgt:

*) *Hesse, Eigenschaften der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung u. s. w.* (*Crelles* Journal, T. 38., Berlin, Reimer, 1849, S. 257—261).

Lehrsatz X. *Jeder Scheitel eines sycigetischen Dreiseits ist der Pol der Gegenseite für alle Curven des sycigetischen Büschels dritter Ordnung.*

Ist r ein Scheitel eines sycegetischen Dreiseits rr_1r_2, so gehen durch r die harmonischen Polaren der drei Wendepuncte, die auf der Gegenseite r_1r_2 liegen. Daher sind nach Nr. 139*a bis* die sechs Tangenten, die man von r an der Curve dritter Ordnung legen kann, auf drei verschiedene Arten in Involution. Für jede dieser Arten sind die Gerade, die r mit einem Wendepuncte verbindet, und die entsprechende harmonische Polare die correspondierenden Doppelstralen.

Da die harmonischen Polaren der Wendepuncte für alle gegebenen sycigetischen Curven dritter Ordnung dieselben sind, so liegt, wenn man eine beliebige Transversale durch einen Wendepunct i, der auf r_1r_2 liegt, zieht, der zu i in Bezug auf die Durchschnittspuncte der Transversale mit rr_1 und rr_2 zugeordnete harmonische Punct nach Nr. 139. auf der harmonischen Polare von i. Hieraus folgt, dasz die rr_1 und rr_2 conjugierte harmonische Stralen in Bezug auf die Gerade ri und die harmonische Polare von i sind; die Doppelstralen der drei Involutionen, die durch die Tangenten, welche man von r an die gegebene Curve dritter Ordnung — und also auch an alle andere sycigetischen Curven — legen kann, gebildet werden, sind also ebenfalls in einer neuen Involution, deren Doppelstralen die Seiten rr_1, rr_2 des sycigetischen Dreiseits sind. Daher der Satz:

Lehrsatz XI. *Drei Wendepuncte in gerader Linie und die Durchschnittspuncte dieser Geraden mit den entsprechenden harmonischen Polaren sind sechs Puncte in Involution.*

Ebenso gibt der Satz in Nr. 139*a bis.*, auf das Büschel sycigetischer Curven dritter Ordnung angewendet, den neuen Satz:

Lehrsatz XII. *Gegeben ein sycigetisches Büschel Curven dritter Ordnung. Zieht man durch einen beliebig auf der harmonischen Polare eines Wendepunctes gelegenen Punct Tangentenpaare an die Curven dritter Ordnung, in der Art, dasz die Berührungssehnen immer durch den gewählten Wendepunct gehen, so bilden diese an Zahl unbegrenzten Tangentenpaare eine Involution, deren Doppelstralen aus*

der Geraden, die nach dem Wendepunct gezogen ist, und der harmonischen Polare bestehen.

143. **Die Curve dritter Ordnung als Curve von Hesse dreier mit ihr sycigetischer Curven derselben Ordnung.** Um die Eigenschaften eines Büschels sycigetischer Curven dritter Ordnung weiter zu studieren, laszen wir eine beliebige von ihnen von der harmonischen Polare J des Wendepunctes i in den Puncten m, m', m'' geschnitten werden, so dasz also die Tangenten in diesen drei Puncten durch die Geraden $i(m, m', m'')$ gegeben sind. Die Wendetangente derselben Curve dritter Ordnung im Wendepuncte i schneide die J im Puncte n. Dann ist die betrachtete Curve durch jeden der Puncte n, m, m', m'' vollständig individualisiert, und wenn wir die Curve sich verändern laszen, so erzeugen die drei Puncte m, m', m'' eine Involution des dritten Grades, die der einfachen, durch die Puncte n erzeugten Punctreihe projectivisch ist.

Sind r, r_1, r_2, r_3, die vier Doppelpuncte dieser Involution, so sind sie nach Nr. 142. auch Scheitel der vier sycigetischen Dreiseite; es seien ferner s, s_1, s_2, s_3 die Durchschnittspuncte der respectiven Gegenseiten mit der Geraden J. Für diese *dreiseitigen Curven dritter Ordnung* sind offenbar die Tangenten des Wendepunctes i eben die Seiten $i(s, s_1, s_2, s_3)$, so dasz also, so oft die beiden Puncte m' und m'' mit r zusammenfallen, auch die Puncte m und n sich mit s vereinigen.

Die Gerade in, welche eine Curve des Büschels im Wendepuncte i berührt, ist nach Nr. 141. auch Tangente der Curve von *Hesse* dieser Curve im Puncte n. Trifft also eine gegebene Curve dritter Ordnung dieses Büschels die Gerade J in den Puncten m, m', m'', so sind die Geraden $i(m, m', m'')$ Tangenten im Wendepuncte i für eben soviele Curven des Büschels, welche als Curve von *Hesse* die gegebene Curve haben. Daher entsteht:

Lehrsatz XIII. *Eine gegebene Curve dritter Ordnung ist im Allgemeinen die Curve von Hesse dreier mit ihr sycigetischer Curven dritter Ordnung**).

*) *Hesse, Ueber die Elimination der Variablen u. s. w.* (*Crelles* Journal. T. 28, Berlin, Reimer 1844. S. 89).

a. **Die sycigetischen Dreiseite als Curven von Hesse.** Ist die gegebene Curve dritter Ordnung ein Dreiseit, deszen einer Scheitel in *r* fällt, und deszen Gegenseite durch *s* geht, so reducieren sich die drei Tangenten $i(m', m'')$, im auf die zwei Geraden ir und is. Die letzte dieser beiden Geraden kann als Wendetangente der gegebenen Curve dritter Ordnung angesehen werden, die also dann ihre eigene Curve von *Hesse* bildet; die andere Gerade ir wird in i Tangente an eine Curve des Büschels sein, die als Curve von *Hesse* das gegebene Dreiseit hat. Folglich ist jede dreiseitige Curve dritter Ordnung ihre eigene Curve von *Hesse* und die noch einer andern Curve des Büschels. Das heiszt:

> **Lehrsatz XIV.** *In einem sycigetischen Curvenbüschel dritter Ordnung gibt es vier Curven, deren Curven von Hesse die vier Dreiseite des Büschels bilden.*

b. **Die Curve dritter Ordnung als Curve von Hesse ihrer Curve von Hesse.** Wir wollen jetzt untersuchen, ob es in dem gegebenen Büschel irgend eine Curve dritter Ordnung gibt, welche die Curve von *Hesse* ihrer eigenen Curve von *Hesse* ist. Eine Curve dritter Ordnung C hat als Curve von *Hesse* eine andere Curve dritter Ordnung, deren Curve von *Hesse* eine dritte Curve dritter Ordnung C' ist. Nehmen wir dagegen die Curve C' beliebig in dem Büschel an, so ist diese die Curve von *Hesse* für drei Curven dritter Ordnung, die ihrerseits wieder Curven von *Hesse* für je drei Curven C dritter Ordnung sind. Auf diese Art entstehen durch C' neun Curven C. Da nun die Curven C und C' durch ihre respectiven Tangenten im Puncte i nach Nr. 46. individualisiert sind, oder auch durch die Puncte n und n', in denen diese die harmonische Polare J schneiden, so können wir sagen, dasz jedem Puncte n ein einziger Punct n' entspricht, jedem Puncte n' aber neun Puncte n. Deshalb werden also zehnmal einander entsprechende Puncte n und n' zusammenfallen, das heiszt, es gibt zehn Curven dritter Ordnung, die der gegebenen Bedingung entsprechen. Zu dieser Zahl gehören aber auch die vier sycigetischen Dreiseite; laszen wir diese also auszer Acht, so entsteht:

> **Lehrsatz XV.** *Ein sycigetisches Büschel von Curven*

dritter Ordnung enthält sechs Curven, deren jede die Curve von Hesse ihrer eigenen Curve von Hesse ist).*

144. **Relationen zwischen den Abschnitten.** Wir suchen jetzt die Relation zwischen den Abschnitten zu bestimmen, welche die Projectivität, die zwischen der Involution dritten Grades der Puncte m, m', m'' und der einfachen Punctreihe der Puncte n nach Nr. 143. besteht, ausdrückt. Nehmen wir als Anfang der Abschnitte den Punct r, das heiszt den Scheitel eines der sycigetischen Dreiseite, der auf der Geraden J liegt, und bezeichnen durch m einen beliebigen der drei Puncte m, m', m'', so kann nach Nr. 24a. die Projectivität, um die es sich handelt, durch eine Gleichung von folgender Form ausgedrückt werden:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}(\alpha.rn+\alpha')\overline{rm}^3 + 3(\beta.rn+\beta')\overline{rm}^2 \\ +3(\gamma.rn+\gamma')rm \\ +\delta.rn+\delta'\end{aligned}\right\} = 0,$$

worin

$$\alpha,\ \alpha';\ \beta,\ \beta';\ \gamma,\ \gamma';\ \delta,\ \delta'$$

constante Coefficienten bezeichnen. Den Punct s, der nach Nr. 143. dem Puncte r entspricht, setzen wir als im Unendlichen voraus, wie es, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Abbruch zu tun, erlaubt ist. Da wir ferner von Relationen zwischen Doppelverhältniszen handeln, so dürfen wir den Puncten der Gerade J nach Nr. 18. ihre Projectionen substituieren, die aus einem beliebigen Mittelpunct auf eine Gerade gemacht sind, die dem Stral, der durch s geht, parallel ist.

Die drei Werte von rm, die den Werten $rn = rs = \infty$ entsprechen, müszen unter dieser Voraussetzung die folgenden sein: $rm = rs$, $rm' = 0$, $rm'' = 0$, und hieraus ergibt sich $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$.

Nun ist aber s nach Nr. 142. ein Punct der geraden Polare

*) *Salmon*, *Higher plane curves*, p. 184. — *Aronhold*, *Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variablen.* (*Crelles* Journal, T. 39, Berlin, Reimer 1850, S. 153.)

von r in Bezug auf jede Curve des Büschels dritter Ordnung, folglich ist nach Nr. 11.:

$$\frac{3}{rs} = \frac{1}{rm} + \frac{1}{rm'} + \frac{1}{rm''} = -\frac{3\gamma'}{\delta'}.$$

Da rs unendlich ist, so folgt hieraus $\gamma' = 0$. Gleichung (1) reduciert sich also auf:

$$(2) \qquad \alpha'.\overline{rm}^3 + 3(\beta.rn + \beta')\overline{rm}^2 + \delta' = 0$$

Die Bedingung, unter der die Gleichung (2), rm als Unbekannte betrachtet, zwei gleiche Wurzeln hat, ist

$$(3) \qquad \alpha'^2.\delta' + 4(\beta.rn + \beta')^3 = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades in Bezug auf rn gibt also die drei Puncte n nämlich (s_1, s_2, s_3), deren jedem, wie dem Puncte s, zwei zusammenfallende Puncte m, nämlich (r_1, r_2, r_3), entsprechen.

Setzen wir in derselben Gleichung (2) $rm = rn$, so erhalten wir:

$$(4) \qquad (\alpha' + 3\beta)\overline{rn}^3 + 3\beta'.\overline{rn}^2 + \delta' = 0,$$

so dasz also jeder der Puncte n die durch die Gleichung (4) gegeben sind, mit einem der entsprechenden Puncte m zusammenfällt. Die Puncte n aber, die auszer s diese Eigenschaft besitzen, sind dieselben drei Puncte s_1, s_2, s_3, die schon durch Gleichung (3) bestimmt sind. Die Gleichungen (3) und (4) müszen also, da sie dieselben Wurzeln haben, proportionierte Coefficienten besitzen.

Die Gleichung (4) enthält rn nicht in der ersten Potenz. Setzen wir also den Coefficienten von rn in Gleichung (3) der Null gleich, so entsteht

$$\beta.\beta'^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \beta' = 0,$$

weil, wenn man $\beta = 0$ setzen wollte, der Abschnitt rn aus Gleichung (2) verschwinden würde. Die Gleichungen (3) und (4) sind daher:

$$4\beta^3.\overline{rn}^3 + \alpha'^2\delta' = 0,$$
$$(\alpha' + 3\beta)\overline{rn}^3 + \delta' = 0.$$

Eliminiert man aus ihnen rn, so entsteht:

(5) $$(\alpha' - \beta)(\alpha' + 2\beta)^2 = 0.$$

Setzt man $\alpha' = \beta$ und der Kürze wegen $\delta' = -4\lambda^3.\beta$, oder setzt man $\alpha' = -2\beta$ und ebenfalls der Kürze wegen $\delta' = -\lambda^3.\beta$, so geben die Gleichungen (3) und (4) in beiden Fällen:

$$\overline{rn}^3 - \lambda^3 = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind dann die Abschnitte rs_1, rs_2, rs_3.

Machen wir wieder

$$\lambda^3 = \overline{rn}^3, \quad \beta' = 0,$$

und auszerdem

$$\alpha' = \beta \quad \text{oder} \quad \alpha' = -2\beta,$$

so wird die Gleichung (2) im ersten Falle:

(7) $$(rm - rn)(rm + 2rn)^2 = 0$$

und im zweiten:

$$(rm - rn)^2(2rm + rn) = 0.$$

Im ersten Falle also fällt einer der drei Puncte m, die den Werten $n = (s_1, s_2, s_3)$ entsprechen, mit eben diesem Puncte n zusammen, während die andern beiden sich in einen einzigen Punct (r_1, r_2, r_3) der von n verschieden ist, vereinigen. Im zweiten Falle dagegen fallen zwei der drei Puncte m, die den Werten $n = (s_1, s_2, s_3)$ entsprechen, mit n zusammen. In unserer Aufgabe aber trifft nach Nr. 143. der erste Fall zu, und nicht der zweite; wir müszen daher $\alpha' = \beta$ annehmen und nicht $\alpha = -2\beta$.

Die gesuchte Gleichung für die Projectivität zwischen der Involution, die durch die drei Puncte m, m', m'' entsteht, und der einfachen Punctreihe, welche die Puncte n bilden, kann also folgendermaszen geschrieben werden:

(8) $$\overline{rm}^3 + 3rn.\overline{rm}^2 - 4\lambda^3 = 0,$$

wo λ einen constanten Coefficienten bezeichnet.

a. **Eine Curve dritter Ordnung hat höchstens drei reelle Wendepuncte.** Die Puncte s_1, s_2, s_3 sind durch die Gleichung (6), die Puncte r_1, r_2, r_3 dagegen durch die Gleichung (7) gegeben, nämlich durch:

$$rm + 2rn = 0,$$

oder auch durch

$$\overline{rm}^3 + 8\lambda^3 = 0.$$

Folglich sind beide Systeme von vier Puncten s, s_1, s_2, s_3 und r, r_1, r_2, r_3 nach Nr. 27. äquianharmonische.

Hieraus folgt, dasz, wenn i ein *reeller* Wendepunct der sycigetischen Curve dritter Ordnung ist, zwei der vier Scheitel r, die auf der harmonischen Polare J liegen, reell sind, die andern aber nach Nr. 26. imaginär. Nach der in Nr. 141 *d.* gezeigten Reciprocität, werden zwei der vier Geraden R, Seiten der sycigetischen Dreiseite, die sich in i schneiden, reell sein, die andern beiden imaginär. Dasz wenigstens ein Wendepunct einer Curve dritter Ordnung reell sein musz, folgt offenbar daraus, dasz die Gesammtzahl der Durchschnittspuncte der Curve dritter Ordnung mit ihrer Curve von *Hesse ungerade* ist.

Es sei also 1 ein reeller Wendepunct, und von den vier Geraden R, (m. s. Nr. 140 *b.*) nämlich 123, 148, 157, 169, seien die beiden ersten reell, die beiden andern imaginär conjugiert. Die vier Wendepuncte 5, 7 und 6, 9 sind notwendigerweise alle imaginär, und gleichzeitig einer der ersten zwei immer einem der zwei letzten conjugiert. Es seien 5 und 9 und 6 und 7 einander respective conjugiert. Die beiden reellen Geraden 59 und 67 und die beiden imaginär conjugierten 56 und 79 schneiden sich jede in einem rellen Puncte, es seien dies r und r_1, die nach Nr. 139 *a.* auf der harmonischen Polare des Wendepunctes 1 liegen.

Da die Geraden 123 und 148 beide reell sind, so müszen die Wendepuncte 2, 3 und ebenso 4, 8, entweder beide reell oder beide imaginär conjugiert sein. Nun müszen aber die Geradenpaare [24, 38] und [28, 34] die beiden andern Scheitel r_2 und r_3 liefern, die mit r und r_1 in gerader Linie liegen; da aber r_2 und r_3 imaginär sind, so können die Puncte 2, 3, 4, 8

weder alle reell, noch alle imaginär sein, das heiszt 2 und 3 sind reell, 4 und 8 imaginär.

Daraus folgt nun:

Lehrsatz XVI. *Von den neun Wendepuncten einer Curve dritter Ordnung sind nur drei in gerader Linie reell, während die andern zu zwei und zwei imaginär conjugiert sind**).

Von den zwölf Geraden R, welche je drei Wendepuncte enthalten, sind vier [123, 148, 259, 367] reell, die andern nicht. Eins der vier sycigetischen Dreiseite hat nur einen reellen Scheitel, ein anderes hat drei, die beiden andern gar keinen Scheitel reell.

b. Folgerung für die Curve von Hesse. Wie wir soeben vorausgesetzt haben, sei m einer der Puncte, in denen eine gegebene Curve des Büschels dritter Ordnung die Gerade J schneide, und es sei n der Durchschnitt derselben Geraden mit der Tangente im Wendepuncte t. Ferner mögen die Puncte m und n die analogen Puncte für die Curve von *Hesse* der gegebenen Curve dritter Ordnung bezeichnen. Dann haben wir der Gleichung (8) analog:

$$\overline{rm}^3 + 3rn.\overline{rm}^2 - 4\lambda^3 = 0.$$

Wie aber schon in Nr. 143. bemerkt wurde, geht die Curve von *Hesse* durch den Punct n, daher ist

$$\overline{rn}^3 + 3rn.\overline{rn}^2 - 4\lambda^3 = 0, \tag{9}$$

und hieraus entnimmt man, wenn n gegeben ist, den Punct n. Fällt z. B. n mit r zusammen, so ist $rn = \infty$, das heiszt n fällt mit s zusammen, und ist n einer der drei Puncte r_1, r_2, r_3, das heiszt, ist n durch die Gleichung

$$\overline{rn}^3 + 8\lambda^3 = 0$$

gegeben, so erhält man

$$2rn + rn = 0,$$

*) *Plücker*, System der analytischen Geometrie. S. 265.

das heiszt, n ist einer der drei Puncte s_1, s_2, s_3. Daraus folgt, dasz die sycigetischen Curven dritter Ordnung, deren Wendetangenten im Wendepuncte t durch einen der Puncte r, r_1, r_2, r_3 gehen, zu Curven von *Hesse* die sycigetischen Dreiseite haben, wie wir schon oben in Nr. 143*a*. fanden.

Ist umgekehrt der Punct n gegeben, so gibt die Gleichung (9) nach Nr. 143. die drei Puncte n, die den drei Curven dritter Ordnung entsprechen, deren gemeinschaftliche Curve von *Hesse* die Curve ist, die dem Puncte n zugehört.

c. **Bedingungsgleichung für die Curven, die die Curven von Hesse ihrer eigenen Curve von Hesse sind.** Ist die gegebene Curve dritter Ordnung eine der in Nr. 143*b*. gefundenen Curven von *Hesse* ihrer eigenen Curve von *Hesse*, so hat man auszer der Gleichung (9) auch noch folgende:

$$\overline{rn}^3 + 3rn.\overline{rn}^2 - 4\lambda^3 = 0.$$

Zieht man diese von Gleichung (9) ab, und eliminiert man aus der resultierenden Gleichung, mit Unterdrückung des Factors $\overline{rn} - rn$, der den dreiseitigen Curven dritter Ordnung entspricht, rn mittelst derselben Gleichung (9), so erhält man die Gleichung:

$$(10) \qquad \overline{rn}^6 - 20\lambda^3.\overline{rn}^3 - 8\lambda^6 = 0;$$

eine Gleichung des sechsten Grades, welche die sechs Puncte n gibt, die den sechs Curven dritter Ordnung entsprechen, welche die Curven von *Hesse* ihrer eigenen Curve von *Hesse* sind.

145. **Die Curve von Hesse einer äquianharmonischen und einer harmonischen Curve dritter Ordnung.** Die vier Tangenten, die man im Allgemeinen an eine Curve dritter Ordnung von einem ihrer Puncte aus legen kann, sind, im Falle der Punct ein Wendepunct t ist, die Geraden $t(n, m, m', m'')$. Das in Nr. 131*b*. definierte Doppelverhältnisz der Curve dritter Ordnung ist also das der Puncte n, m, m', m'', in denen die harmonische Polare des Wendepunctes von der Wendetangente und der Curve dritter Ordnung selbst geschnitten wird.

Dies vorausgesetzt, können wir untersuchen, welche der

sycigetischen Curven dritter Ordnung des gegebenen Büschels die in Nr. 131 *b.* definierten äquianharmonischen und harmonischen Curven dritter Ordnung sind.

Ebenso wie die drei Puncte m, m', m'' durch die Gleichung (8) gegeben sind, so sind die vier Puncte n, m, m', m'' durch die Gleichung repräsentiert:

$$(11)\quad \overline{rm}^4 + 2rn.\overline{rm}^3 - 3\overline{rn}^2.\overline{rm}^2 - 4\lambda^3.rm + 4\lambda^3.rn = 0,$$

die man erhält, wenn man Gleichung (8) mit $rm - rn$ multipliciert.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit Gleichung (11) ein äquianharmonisches System bilde, ist nach Nr. 27.:

$$rn(\overline{rn}^3 + 8\lambda^3) = 0,$$

durch welche Gleichung die vier Puncte r, r_1, r_2, r_3 gegeben sind. Nach Nr. 144 *b.* folgt daher:

Lehrsatz XVII. *Ein sycigetisches Curvenbüschel dritter Ordnung enthält vier äquianharmonische Curven, deren jede auch die Eigenschaft besitzt, als Curve von Hesse ein sycigetisches Dreiseit zu haben.*

Damit Gleichung (11) ein harmonisches System bilde, musz nach Nr. 6. sein:

$$\overline{rn}^6 - 20\lambda^3.\overline{rn}^3 - 8\lambda^6 = 0.$$

Diese Gleichung fällt mit Gleichung (10) zusammen, und daraus folgt:

Lehrsatz XVIII. *Ein sycigetisches Curvenbüschel dritter Ordnung enthält sechs harmonische Curven, die auch die Curven sind, welche die Curven von Hesse ihrer eigenen Curve von Hesse darstellen*).*

*) Salmon, *Higher plane curves.* p. 192.

§. 24.

Die Curve dritter Ordnung als Curve von Hesse dreier verschiedener Netze von Kegelschnitten betrachtet.

146. Eine Curve dritter Ordnung enthält drei Systeme correspondierender Puncte. Nach Nr. 143. kann eine beliebige gegebene Curve dritter Ordnung C_3 als Curve von *Hesse* dreier mit ihr sycigetischer Curven dritter Ordnung angesehen werden. Jeder dieser drei Curven entspricht ein Netz conischer Polaren, so dasz also jede Curve dritter Ordnung die Curve von *Hesse* dreier verschieder Netze von Kegelschnitten ist. In Bezug auf jedes dieser drei Netze ist die gegebene Curve dritter Ordnung nach Nr. 132*b*. der Ort der Paare conjugierter Pole, so dasz also die Puncte einer Curve dritter Ordnung auf drei verschiedene Arten zu zwei und zwei conjugiert sein können, in der Art, dass je zwei conjugierte Puncte denselben Tangentialpunct besitzen. Daher gilt nach Nr. 133*a*. der Satz:

Lehrsatz I. *In einer Curve dritter Ordnung existieren drei Systeme correspondierender Puncte.*

Ist nämlich z. B. o ein Punct der gegebene Curve dritter Ordnung und u sein Tangentialpunct, so gehen nach Nr. 130*d*. von u auszer uo noch drei Tangenten aus, deren Berührungspuncte wir respective durch o', o'', o''' bezeichnen wollen. Wir haben also die folgenden drei Paare conjugierter Pole, o, o'; o, o''; o, o''', die sich auf die drei verschiedene Netze von Kegelschnitten beziehen, welche als gemeinschaftliche Curve von *Hesse* die gegebene Curve dritter Ordnung haben.

Indem man dieselbe Schluszfolgerung auf jeden der Puncte o', o'', o''' ebenso anwendet, wie auf den Punct o, sieht man sehr leicht, dasz für das erste Netz o, o' und o'', o'''; für das zweite o, o'' und o''', o'; für das dritte o, o''' ond o', o'' conjugierte Pole vorstellen.

a. Eigenschaft des vollständigen Vierecks, das aus den Berührungspuncten von vier Tangenten, die sich in einem Puncte der Curve selbst schneiden, ge-

bildet ist. Es seien o, o' und o'', o''' zwei Paare conjugierter Pole in Bezug auf dasselbe Netz. Schneiden sich nun die Geraden oo'' und $o'o'''$ in y und die oo''' und $o'o''$ in z, so sind auch nach Nr. 134. y und z ein Paar conjugierter Pole für dasselbe Netz.

Die Puncte o, o'', y liegen in einer Geraden, folglich liegen nach Nr. 39*b*. ihre Tangentialpuncte, die auch bezüglich die Tangentialpuncte der Puncte o', o''', z sind, auf einer zweiten Geraden. Die Tangentialpuncte von o und o'' fallen aber in u zusammen, so dasz damit auch der gemeinschaftliche Tangentialpunct von y und z mit u zusammenfällt. Daraus ergibt sich:

Lehrsatz II. *Sind o, o', o'', o''' die Berührungspuncte einer Curve dritter Ordnung mit den Tangenten, die man durch einen ihrer Puncte u legen kann, so liegen die Diagonalpuncte x, y, z des Vierecks $oo'o''o'''$ auf dieser Curve, und die Tangenten in u, x, y, z, schneiden sich in ein und demselben Puncte derselben Curve.*

b. Vollständige einer Curve dritter Ordnung eingeschriebene Vierseite. Aus dem Satze in Nr. 134. folgt, wenn a, a'; b, b' zwei Paare correspondierender Puncte der Curve dritter Ordnung sind, dasz es, damit diese sich auf ein und dasselbe System beziehen, notwendig und hinreichend ist, wenn der Durchschnittspunct von ab und $a'b'$, sowie der von ab', $a'b$ auf der Curve liegen. Hieraus können wir mit Rücksicht auf die in Nr. 45*d*. bewiesene Eigenschaft Folgendes schlieszen:

Lehrsatz III. *Ist ein vollständiges Vierseit einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben, so bilden die Gegenscheitel drei Paare correspondierender Puncte, die zu einem und demselben Systeme gehören.*

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Einteilung der vollständigen, einer gegebenen Curve dritter Ordnung eingeschriebenen Vierseite in drei verschiedene Systeme.

c. Beziehungen zwischen correspondierenden Puncten der verschiedenen Systeme. Es seien a, a_1; b, b_2 zwei Paare conjugierter Pole in Bezug auf zwei verschiedene Netze. Der Tangentialpunct von a und a_1 sei α; β der

von b und b_2; es seien ferner c, c_3, $\mathfrak{c}$, die dritten Durchschnittspuncte der gegebenen Curve dritter Ordnung mit den Geraden ab, a_1b_2, $\mathfrak{ab}$; dann wird $\mathfrak{c}$ der Tangentialpunct von c und c_3 sein. Nach *b.* sind also c und c_3 conjugierte Pole, aber in Bezug auf das dritte Netz. Ebenso sind, wenn die Geraden ab_2 und a_1b die Curve noch in den Puncten c_2 und c_1 schneiden, diese beiden Puncte conjugierte Pole in Bezug auf dasselbe dritte Netz*).

147. **Beziehung zwischen vier Puncten, die denselben Tangntialpunct haben.** Gegeben ist ein Punct o und ein Büschel Kegelschnitte, das einem Viereck $efgh$ umgeschrieben ist. Was ist der Ort der Berührungspuncte der Tangenten, die man von o an diese Kegelschnitte legen kann? Da man durch o einen Kegelschnitt des Büschels legen kann, und also auch in o eine Tangente an denselben, so geht der gesuchte Ort durch o. Auszer o enthält jede Transversale, die durch ihn gelegt ist, noch zwei Puncte des Ortes, nämlich die Doppelpuncte der Involution, welche nach Nr. 49. die Kegelschnitte des Büschels auf der Transversale bestimmen. Der gesuchte Ort ist also eine Curve dritter Ordnung, die auch durch e, f, g, h geht, da man einen Kegelschnitt des Büschels so legen kann, dasz er oe in e oder of in f, u. s. w. berührt.

Jeder Kegelschnitt des Büschels schneidet auszer in e, f, g, h die Curven dritter Ordnung noch in zwei Puncten m und m', in denen der Kegelschnitt die Tangenten, die von o an ihn gelegt werden können, berührt. Nach Nr. 65. geht die Gerade mm', die Polare von o in Bezug auf den Kegelschnitt, durch einen festen Punct u, dem *Gegenpunct* der vier Puncte e, f, g, h. Geht der Kegelschnitt durch o, so fallen die beiden Puncte m, m' in o zusammen. Dieser Kegelschnitt berührt also die Curve dritter Ordnung in o, und u ist also der Tangentialpunct von o.

Unter den Kegelschnitten des Büschels gibt es drei Systeme von zwei Geraden, nämlich die Paare Gegenseiten (ef, gh), (eg, fh),

*) Hesse, *Ueber Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren.* (Crelles Journal, T. 36. Berlin, Reimer. 1848. S. 148—152).

(eh, fg) des gegebenen Vierecks. Für jeden dieser Kegelschnitte fallen die Puncte m und m' in den bezüglichen Diagonalpunct zusammen. Daraus folgt, dasz die Diagonalpuncte o', o'', o''' des Vierecks der Curve dritter Ordnung angehören, und dasz die Tangenten in diesen Puncten sich in u schneiden.

Da die Geraden $o(e, f, g, h)$ Tangenten der Curve dritter Ordnung in e, f, g, h sind, so ist der Kegelschnitt, der durch die fünf Puncte o, e, f, g, h geht, die erste Polare des Punctes o in Bezug auf eben diese Curve dritter Ordnung. Dem entsprechend ist der Kegelschnitt durch u, o, o', o'', o''' die erste Polare von u.

148. Die geraden Polaren eines Punctes einer Curve dritter Ordnung in Bezug auf die mit dieser sycigetischen Curven gehen durch den Tangentialpunct des gegebenen Punctes. Ein beliebiger Punct der gegebenen Curve C_3 dritter Ordnung sei durch o bezeichnet, und es sei u der Tangentialpunct von o. Ist K_3 eine Curve dritter Ordnung, deren Curve von *Hesse* C_3 ist, so besteht die conische Polare von u in Bezug auf K_3 aus einem Paar Geraden, deren eine nach Nr. 133*b*. durch o geht; folglich geht die gerade Polare von o in Bezug auf K_3 durch u. Der Punct u liegt aber auch auf der geraden Polare von o in Bezug auf C_3, weil diese letzte Curve in o von der Geraden ou berührt wird. In u schneiden sich also nach Nr. 84*c*. alle geraden Polaren von o in Bezug auf alle Curven dritter Ordnung, die durch die Durchschnittspuncte der Curven C_3 und K_3 beschrieben sind. Daraus folgt:

Lehrsatz IV. *Berührt eine Gerade eine Curve dritter Ordnung in o und schneidet sie einfach in einem andern Puncte u, so gehen die geraden Polaren von o in Bezug auf alle mit der gegebenen Curve dritter Ordnung sycigetischen Curven durch den Punct u*).*

a. Weitere Eigenschaften der geraden Polaren. Es seien o, o', o'', o''' die Berührungspuncte der Tangenten der Curve dritter Ordnung die durch u gehen. Nach dem letzten

*) *Salmon, On curves of the third order*, p. 535.

Satze liegt u auf der geraden Polare eines jeden dieser vier Puncte in Bezug auf alle sycigetischen Curven dritter Ordnung. Folglich gehen die conischen Polaren von u in Bezug auf dieselben Curven dritter Ordnung sämmtlich durch o, o', o'', o''' *).

Die drei Paar Gegenseiten des Vierecks $oo'o''o'''$ sind die conischen Polaren von u in Bezug auf die drei sycigetischen Curven, deren Curve von **Hesse** die C_3 ist, das heiszt, sie sind Tangenten an die drei entsprechenden Curven von **Cayley**.

b. Fortsetzung. Man beachte auszerdem, dasz nach Nr. 146*a*. die Puncte o', o'', o''' die Diagonalpuncte des Vierecks sind, das durch die Berührungspuncte der durch o an die Curve dritter Ordnung gelegten Tangenten gebildet wird. Folglich ist o' nach Nr. 108*b*. der Pol der Geraden $o''o'''$ in Bezug auf alle conischen Polaren von o für alle sycigetischen Curven dritter Ordnung, u. s. w.

149. Eigenschaften der Tangenten einer Curve dritter Ordnung aus drei ihrer Puncte in gerader Linie. Es seien a, b, c die drei Puncte, in denen eine Gerade eine gegebene Curve dritter Ordnung schneidet, und a_0, a_1, a_2, a_3; b_0, b_1, b_2, b_3; c_0, c_1, c_2, c_3 die Berührungspuncte der Tangenten die sich bezüglich durch diese Puncte legen laszen. Da die Tangentialpuncte dreier Puncte in gerader Linie ebenfalls in gerader Linie liegen, so musz notwendig die Gerade, die einen der Puncte a mit einem der Puncte b verbindet, durch einen der Puncte c gehen. Die zwölf Puncte a, b, c liegen daher zu drei und drei auf sechszehn Geraden **).

Es seien a_0, b_0, c_0 drei Puncte, die aus diesen zwölf Puncten in der Art ausgewählt sind, dasz sie auf einer Geraden liegen, und es seien a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 bezüglich die *correspondierenden* Puncte derselben in Bezug auf die drei Netze Kegelschnitte, denen die gegebene Curve, als Curve von **Hesse** angesehen, nach Nr. 146. Entstehung gibt. Nach dem Satze in Nr. 134. sind immer, auszer

*) *Cayley*, *A Memoir on curves etc.* p. 443.

**) *Plücker*. *System der analytischen Geometrie*, S. 272.

$$a_0,\ b_0,\ c_0,$$

zu je drei folgende Puncte in gerader Linie, nämlich

$$a_0,\ b_1,\ c_1; \qquad b_0,\ c_1,\ a_1; \qquad c_0,\ a_1,\ b_1;$$

$$a_0,\ b_2,\ c_2; \qquad b_0,\ c_2,\ a_2; \qquad c_0,\ a_2,\ b_2;$$

$$a_0,\ b_3,\ c_3; \qquad b_0,\ c_3,\ a_3; \qquad c_0,\ a_3,\ b_3.$$

Nach dem Satze in Nr. 146*c*. sind auszerdem noch in gerader Linie:

$$a_1,\ b_2,\ c_3; \qquad a_2,\ b_3,\ c_1; \qquad a_3,\ b_1,\ c_2;$$

$$a_1,\ b_3,\ c_2; \qquad a_2,\ b_1,\ c_3; \qquad a_3,\ b_2,\ c_1.$$

Diese sechszehn Gerade laszen sich in acht Systeme von je vier Geraden verteilen, die jedesmal alle zwölf Berührungspuncte enthalten*).

a. Eigenschaft der Puncte a_1, b_1, c_1. Die Puncte a_1, b_1, c_1, die den Puncten a_0, b_0, c_0 in Bezug auf ein und dasselbe Netz entsprechen, sind nach Nr. 134. die Scheitel eines Dreiecks, deszen Seiten der Reihe nach durch a_0, b_0, c_0 gehen, und nach Nr. 137. gleichzeitig die Berührungspuncte der Curve dritter Ordnung mit der Poloconica der Geraden $a_0b_0c_0$ in Bezug auf dieses Netz. Nach Nr. 39. schneiden sich daher die Geraden, welche die Puncte a_1, b_1, c_1 mit den Scheitelpuncten des Dreiecks verbinden, das durch die drei Tangenten aa_1, bb_1, cc_1 gebildet wird, in ein und demselben Puncte**).

Es ist überflüszig, daran zu erinnern, dasz dieselbe Eigenschaft auch für die Puncte a_2, b_2, c_2 und a_3, b_3, c_3 Platz greift, welche den Puncten a_0, b_0, c_0 in Bezug auf die beiden übrigen Netze entsprechen.

*) *Hesse, Ueber Curven dritter Ordnung u. s. w.*, S. 153. Die acht Systeme von vier Geraden sind die folgenden:

$a_0b_0c_0$, $a_0b_0c_0$, $b_0c_1a_1$, $b_0c_1a_1$, $c_0a_1b_1$, $c_0a_1b_1$, $a_0b_1c_1$, $a_0b_1c_1$,
$a_1b_2c_3$, $a_1b_3c_2$, $b_1c_3a_2$, $b_1c_2a_3$, $c_1a_3b_2$, $c_1a_2b_3$, $a_1b_3c_2$, $a_1b_2c_3$,
$b_1c_2a_3$, $b_1c_3a_2$, $c_0a_3b_3$, $c_0a_2b_2$, $a_0b_3c_3$, $a_0b_2c_2$, $b_0c_3a_3$, $b_0c_2a_2$,
$c_1a_2b_3$; $c_1a_3b_2$; $a_0b_2c_2$; $a_0b_3c_3$; $b_0c_2a_2$; $b_0c_3a_3$; $c_0a_2b_2$; $c_0a_3b_3$.

**) *Plücker, System der analytischen Geometrie*, S. 46.

b. **Weitere Eigenschaften der gegebenen Puncte.** Die Geraden a_0b_0 und a_1b_1 schneiden sich in einem Puncte c der gegebenen Curve, diese geht somit sowol durch die Durchschnittspuncte der zwei Systeme von drei Geraden (aa_0, bb_0, cc_0) und (ab, a_0b_0, a_0b_0), wie durch die der beiden andern analogen Systeme (aa_1, bb_1, cc_1) und (ab, a_1b_1, a_1b_1). Es wird nun nach Nr. 50*b.* einen Ort der dritten Ordnung geben, der der doppelten Bedingung genügt, sowol durch die gemeinschaftlichen Puncte der beiden Systeme (aa_0, bb_0, cc_0) und (aa_1, bb_1, cc_1) zu gehen, als die Durchschnittspuncte der beiden Systeme (ab, a_0b_0, a_0b_0) und (ab, a_1b_1, a_1b_1) zu enthalten. Diese beiden Bedingungen werden ganz genau durch das System dreier Geraden

$$(ab, [01][10], cc_0)$$

erfüllt, worin [01] den Durchschnittspunct der Geraden aa_0 und bb_1 bedeutet und [10] den Punct, in dem sich aa_1 und bb_0 schneiden. Nun kann aber jeder Ort der dritten Ordnung, der zu dem Büschel gehört, das durch die beiden Systeme (ab, a_0b_0, a_0b_0) und (ab, a_1b_1, a_1b_1) bestimmt wird, nicht anders zusammengesetzt sein, als aus der Geraden ab und einem Paar conjugierten Geraden der quadratischen Involution, deren Doppelstralen a_0b_0 und a_1b_1 sind*). Die Gerade [01][10] geht daher durch den Punct c_0 und ist nach Nr. 25*a.* der conjugierte harmonische Stral von cc_0 in Bezug auf a_0b_0 und a_1b_1.

c. **Fortsetzung.** Mittelst desselben Raisonnement findet man, dasz, wenn aa_0 die Geraden bb_2 und bb_3 in den Puncten [02] und [03] schneidet, und bb_0 ebenso die Geraden aa_2 und aa_3 in den Puncten [20] und [30] trifft, die Geraden [02][20] und [03][30] durch c_0 geben. Folglich haben, wenn wir durch [00] den Durchschnittspunct von aa_0 und bb_0 bezeichnen, die beiden Systeme von vier Puncten:

$$[00, 01, 02, 03] \quad \text{und} \quad [00, 10, 20, 30]$$

gleiche Doppelverhältnisze, da sie die Durchschnittspuncte der

*) Haben die Curven eines Büschels Kegelschnitte einen Doppelpunct c_0 gemein, das heiszt, besteht jede aus einem Paar durch c_0 gelegter Geraden, so bilden die sämmtlichen zusammengehörigen Paare von Geraden augenscheinlich eine Involution, deren Doppelstralen die beiden Curven des Büschels sind, die nach Nr. 48. in c_0 eine Spitze haben.

beiden Transversalen $\mathfrak{a}a_0$, $\mathfrak{b}b_0$ mit ein und demselben Büschel Geraden sind, das durch c_0 geht. Hieraus folgt, dasz die anharmonischen Verhältnisze der beiden Büschel

$$\mathfrak{a}(a_0, a_1, a_2, a_3) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}(b_0, b_1, b_2, b_3)$$

auch gleich sind, das heiszt, dasz die sechs Puncte

$$[00], [11], [22], [33], \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$$

auf demselben Kegelschnitte liegen, wie wir schon oben in Nr. 131*a*. gezeigt haben.

Dem analog haben, da sich in c_1 die vier Graden a_0b_1, a_1b_0, a_2b_3, a_3b_2 schneiden, die Büschel

$$\mathfrak{a}(a_0, a_1, a_2, a_3) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}(b_1, b_0, b_3, b_2)$$

gleiche Doppelverhältnisze, u. s. w., wie so eben.

d. **Eigenschaft der Durchschnittspuncte der beiden projectivischen Stralenbüschel.**

Es schneiden sich im Puncte c_0 die Geraden [01][10], [02][20], ..;
ebenso „ „ „ „ c_1 „ „ [00][11], [22][33], ..;
ferner „ „ „ „ c_2 „ „ [00][22], [33][11], ..;
endlich „ „ „ „ c_3 „ „ [00][33], [11][22], ..*).

Die Puncte [00], [11], [22], [33], in denen sich die homologen Stralen der beiden projectivischen Stralenbüschel $\mathfrak{a}(a_0, a_1, a_2, a_3)$, $\mathfrak{b}(b_0, b_1, b_2, b_3)$ schneiden, bilden daher ein vollständiges Viereck, deszen Diagonalpuncte c_1, c_2, c_3 der Curve dritter Ordnung angehören, und die Berührungspuncte der drei Tangenten sind, die sich in $\mathfrak{c}$, dem dritten Durchschnittspunct der Curve mit der Geraden $\mathfrak{ab}$, schneiden.

Fallen die beiden Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zusammen, so erhalten wir das in Nr. 146*a*. bewiesene Theorem wieder.

e. **Eigenschaft der Durchschnittspuncte der Tangenten aus zwei Puncten einer gegebenen Curve drit-**

*) In jedem der Puncte c schneiden sich sechs, den Geraden [01], [10] analoge gerade Linien.

ter Ordnung. Die Puncte a und b sind die Mittelpuncte zweier projectivischer Stralenbüschel, in denen die Geraden $a(a_0, a_1, a_2, a_3)$ den Geraden $b(b_0, b_1, b_2, b_3)$ entsprechen. Man ziehe durch a eine Gerade, die bb_0 im Puncte $(x0)$ schneide, und verbinde den Punct $[x0]$ mit c_0 durch eine Gerade, die aa_0 im Puncte $[0x]$ treffe; dann ist $\beta[0x]$ die Gerade, welche $a[x0]$ entspricht. Auf diese Art findet sich, dasz der Geraden ab, jenachdem sie dem Büschel a oder b angehörig betrachtet wird, bc_0 oder ac_0 entspricht. Die Graden ac_0 und bc_0 sind daher nach Nr. 59. Tangenten in a und b an den Kegelschnitt, der durch die beiden projectivischen Stralenbüschel erzeugt wird, das heiszt nach Nr. 107., c_0 ist der Pol der Geraden ab in Bezug auf den Kegelschnitt $ab[00][11][22][33]$.

Dem analog sind c_1, c_2, c_3 die Pole der Geraden ab in Bezug auf drei andere Kegelschnitte, die durch a und b, sowie durch die Durchschnittspuncte der Tangenten gelegt sind, die sich in a und b schneiden (m. s. Nr. 131*a*.). Folglich entsteht:

Lehrsatz V. *Die Tangenten, die man durch zwei Puncte a und b einer Curve dritter Ordnung an dieselbe legen kann, schneiden sich in sechszehn Puncten $[xy]$, welche zu vier und vier in vier Kegelschnitten liegen, die durch a und b gehen.*

Lehrsatz VI. *Die Pole der Geraden ab in Bezug auf diese Kegelschnitte liegen auf der Curve dritter Ordnung, die in ihnen von vier Geraden berührt wird, welche sich in c, dem dritten Durchschnittspuncte der Geraden ab mit der Curve dritter Ordnung, treffen.*

Lehrsatz VII. *Die Pole von ab in Bezug auf drei beliebige der vier Kegelschnitte sind die Diagonalpuncte des vollständigen Vierseits, dessen Scheitel die vier Puncte $[xy]$ sind, welche auf dem vierten Kegelschnitt liegen*).*

f. **Durchschnittspuncte der conischen Polare von c_0 mit der Fundamentalcurve.** Die conische Polare von c_0 schneidet, auszer dasz sie die Curve dritter Ordnung in c_0

*) *Salmon, Théorèmes sur les courbes de troisième degré.* p. 276. — *Higher plane curves*, p. 134.

berührt, dieselbe noch in p, q, r, s, und jeder Kegelschnitt, der durch p, q, r, s geht, schneidet die Curve dritter Ordnung in zwei weiteren Puncten, die mit $\mathfrak{c}$, dem Tangentialpunct von c_0, nach Nr. 147. in gerader Linie liegen. Der Kegelschnitt also, der durch p, q, r, s und $\mathfrak{a}$ beschrieben ist, enthält auch den Punct $\mathfrak{b}$.

Bekanntlich hat das vollständige Viereck $pqrs$ seine Diagonalpuncte in c_1, c_2, c_3, das heiszt in den Puncten, die nach 146*a*. mit c_0 den Tangentialpunct gemein haben. Daraus folgt, dasz das Dreieck $c_1c_2c_3$ jedem Kegelschnitt, der dem Viereck $pqrs$ umgeschrieben, conjugiert ist.

Da aber c_1, c_2, c_3 auch die Diagonalpuncte des Vierecks [00][11][22][33] sind, so ist das Dreieck $c_1c_2c_3$ ebenfalls dem Kegelschnitt conjugiert, auf welchem die sechs Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, [00], [11], [22], [33] liegen. Folglich geht nach Nr. 108*e*. dieser Kegelschnitt auch durch p, q, r, s*).

150. **Drei Systeme Kegelschnitte berühren die Fundamentalcurve in drei Puncten.** Wenn man in der allgemeinen Methode in Nr. 67*c*., um den *Gegenpunct* von vier Puncten einer Curve C_3 dritter Ordnung zu construieren, annimmt, dasz durch paarweises Zusammenfallen, dieselben sich auf zwei a und b reducieren, so wird der Gegenpunct $\mathfrak{c}$ mit den Tangentialpuncten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von a und b in gerader Linie liegen, das heiszt, er ist der Tangentialpunct des dritten Durchschnittspunctes c der Fundamentalcurve mit der Geraden ab. Jede Gerade durch $\mathfrak{c}$ schneidet die Curve dritter Ordnung in zwei Puncten m und n, durch welche ein Kegelschnitt geht, der in a und b dieselbe Curve berührt. Fallen daher die Puncte m und n zusammen, so haben die Curve dritter Ordnung und der Kegelschnitt unter sich drei zweipunctige Berührungen. Durch $\mathfrak{c}$ gehen vier Gerade, die C_3 berühren. Einer der Berührungspuncte c liegt mit a und b in gerader Linie; die drei andern seien c_1, c_2, c_3. Wir betrachten den Kegelschnitt, der in den Puncten a, b, c_1 berührt. Die Puncte c und c_1 sind in Bezug

*) *Samuel Roberts*, *On the intersections of tangents drawn through two points on a curve of the third degree.* (Quarterly Journal of pure and applied Mathematics vol. 3, London 1860, p. 121).

auf eines der drei Netze, deren Curve von *Hesse* nach Nr. 146. die gegebene Curve dritter Ordnung ist, conjugierte Pole, und ist b_1 der conjugierte Pol von b in Bezug auf dasselbe Netz, so geht die Gerade b_1c_1 durch a, und die beiden bc_1 und b_1c treffen sich in a_1, dem nach Nr. 134. dem Puncte a für dasselbe Netz conjugierten Pole. Das heiszt, wird die Curve dritter Ordnung in a, b, c_1 von einer Curve zweiter Ordnung berührt, so liegen die in Bezug auf eines der drei Netze conjugierten Pole a_1, b_1, c von a, b, c_1 in gerader Linie. In Bezug auf dieses Netz ist also diese Curve zweiter Ordnung nach Nr. 137. die Poloconica der Geraden a_1b_1c. Sind dem entsprechend a_2, b_2 und a_3, b_3 die correspondierenden Puncte von a, b in Bezug auf die beiden andern Netze, so sind die Kegelschnitte, die in a, b, c_2 und a, b, c_3 berühren, die Poloconiken der Geraden a_2b_2c und a_3b_3c in Bezug auf die erwähnten beiden Netze.

Folglich haben wir:

Lehrsatz VIII. *Die Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung in drei Puncten berühren, verteilen sich in drei Systeme, bezüglich auf die drei Netze, deren gemeinschaftliche Curve von Hesse die gegebene Curve dritter Ordnung ist.*

Die sechs Berührungspuncte zweier Kegelschnitte desselben Systems liegen auf einem schneidenden Kegelschnitt, und umgekehrt, beschreibt man durch die Berührungspuncte eines Kegelschnittes eines bestimmten Systems beliebig eine Curve zweiter Ordnung, so schneidet diese die Curve dritter Ordnung in drei neuen Puncten, in denen dieselbe von einem zweiten Kegelschnitt desselben Systems berührt wird (m. s. auch Nr. 137*a*.).

Soll eine Poloconica durch zwei Puncte o und o' gehen, so wird die Gerade, der sie entspricht, nach Nr. 136*a*. die gemeinschaftliche Tangente der conischen Polaren von o und o' sein. Zwei Kegelschnitte haben aber vier gemeinschaftliche Tangenten, folglich gehen durch zwei gegebene Puncte zwölf Kegelschnitte, für jedes System vier, die drei zweipunctige Berührungen mit der gegebenen Curve dritter Ordnung haben.

Nach Nr. 137. hat die Policonica einer Wendetangente für jedes der drei Netze eine sechspunctige Berührung mit der Curve von *Hesse*. Folglich gilt:

Lehrsatz IX. *Es gibt siebenundzwanzig Kegelschnitte, für jedes System neun, die eine sechspunctige Berührung mit der gegebenen Curve dritter Ordnung eingehen*).*

Die Berührungspuncte sind diejenigen, welche in den drei Systemen den neun Wendepuncten entsprechen, das heiszt, sie sind nach Nr. 39 *d.* die Puncte, in denen die Curve dritter Ordnung von den Tangenten, die man durch durch einen Wendepuncte legen kann, berührt wird. Einen beliebigen dieser Puncte nennen wir *p, q* oder *r*, jenachdem er dem ersten, zweiten oder dritten Systeme angehört.

Drei Wendepuncte in gerader Linie und die neun Puncte *p, q, r,* die ihnen in den drei Systemen entsprechen, bilden einen Complex von zwölf Puncten, auf die man die in Nr. 149. gefundenen Eigenschaften anwenden kann. Auf diese Weise folgt:

Lehrsatz X. *Jede Gerade, die zwei Puncte p desselben Systems verbindet, geht durch einen Wendepunct;*

Lehrsatz XI. *Jede Gerade, welche zwei Puncte p, q von verschiedenen Systemen verbindet, schneidet die Curve dritter Ordnung in einem Puncte r des dritten Systems.*

Auszerdem folgt nach Nr. 137 *a.*:

Lehrsatz XII. *Die sechs Puncte p, die in demselben Systeme sechs Wendepuncten entsprechen, die auf zwei Geraden liegen, liegen auf einem Kegelschnitt**).*

---

*) *Steiner, Geometrische Lehrsätze.* (*Crelles* Journal, T. 13., Berlin, Reimer, 1846, S. 132).

**) *Hesse, Ueber Curven dritter Ordnung u. s. w.* S. 165—175.

Auszer den in diesem und dem letzten Paragraphen citierten Abhandlungen sehe man noch folgende ein:

Möbius, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung (Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, I. Bd., Leipzig 1849. S. 40.).

Bellavitis, Sulla classificazione delle curve del terz' ordine. (Memorie della Società Italiana delle science, t. 25., parte 2., Modena, 1851, p. 33). — *Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica.* (Memorie dell' Istituto Veneto, vol. 8., Venezia 1860, p. 342).

Zusätze und weitere Ausführungen.

Zu Nr. 51.

Es seien zwei projectivische Curvenbüschel gegeben. Die Curven des ersten Büschels haben in einem Basispuncte o ein und dieselbe Tangente, und es sei o auch auf der Curve des zweiten Büschels gelegen, die der Curve des ersten Büschels entspricht, für welche o ein Doppelpunct ist. In Nr. 57 *b*. ist bewiesen, dasz der Ort der Durchschnittspuncte der entsprechenden Curven zweimal durch o geht, wir wollen jetzt untersuchen, welches die beiden Tangenten dieses Ortes im Doppelpuncte sind.

Lemma. Es sien $(U, V, W, \ldots.)$, $(U', V', W', \ldots.)$ die entsprechenden Curven zweier projectivischer Büschel von derselben Ordnung n, die eine Curve K von der Ordnung $2n$ erzeugen, welche durch die Basispuncte der beiden Büschel hindurchgeht.

Die Curven U, U' erzeugen ein neues Büschel, deszen Basispuncte auf K liegen. Eine Curve U'' des letzten Büschels schneidet K in noch andern n^2 Puncten, und beschreibt man durch diese und einen beliebigen andern festen Punct auf K eine Curve n-ter Ordnung, so schneidet diese nach Nr. 54 *a*. K in andere $n^2 - 1$ *festen* Puncten, was auch U'' sei. Ist der beliebig fixierte Punct ein Basispunct des Büschels VV', so bildet er mit den übrigen $n^2 - 1$ festen Puncten die Basis von VV'. Die Curve U schneidet nämlich K in $2n^2$ Puncten von denen n^2 auf U' liegen, und die andern n^2 auf V. Ebenso

schneidet $U'K$ in $2n^2$ Puncten, von denen n^2 auf U liegen und die andern n^2 auf V'. Eine beliebige Curve U'' des Büschels UU' schneidet daher K in anderen n^2 Puncten, die auf einer Curve V'' des Büschels VV' liegen. Die Büschel $(U, U', U'', \dots)$ und $(V, V', V'', \dots)$ sind folglich projectivisch, und die von ihnen erzeugte Curve ist ebenfalls K.

Dem entsprechend liegen die zweiten n^2 Durchschnittspuncte von U'' und K auch auf einer Curve W'' des Büschels WW', und auf diese Weise erhalten wir ein neues Büschel $(U'', V'', W'', \dots)$, das den gegebenen projectivisch ist, und deszen Basispuncte auf K liegen. Da nun die Curven U'', V'', W'', ... bezüglich zu den Büscheln UU', VV', WW', ... gehören, deren Basispuncte sämmtlich auf K liegen, so erzeugt das neue Büschel $(U'', V'', W'', \dots)$ mit einem oder dem andern der gegebenen zusammen dieselbe Curve K. Daraus folgt:

Lehrsatz. *Gegeben zwei projectivische Curvenbüschel $(U, V, W, \dots)$, $(U', V', W', \dots)$ von derselben Ordnung, die eine Curve K erzeugen. Ist U'' eine beliebige Curve des Büschels UU', so lassen sich andere Curven V'', W'' .... bestimmen, die bezüglich zu den Büscheln VV', WW', ... gehören und mit U'' ein neues Büschel angeben, das den gegebenen projectivisch ist und mit jedem derselben zusammen dieselbe Curve K erzeugt.*

Es seien jetzt $(U, V, \dots)$, $(U', V', \dots)$ zwei projectivische Curvenbüschel von beliebiger Ordnung, und K die Curve, die sie erzeugen. Unter Annahme zweier willkürlicher Curven L und L' betrachten wir die projectivischen Büschel $(UL, VL, \dots)$, $(U'L', V'L', \dots)$, die durch Verbindung jeder Curve des einen oder andern gegebenen Büschels mit der Curve L oder L' entstehen. Der von den beiden neuen Büscheln erzeugte Ort ist offenbar der Complex der drei Curven K, L, L'. Die Ordnungen der Linien L, L' seien nun so ausgewählt, dasz die beiden neuen Büschel von gleicher Ordnung sind, dann können wir nach dem vorhergehenden Lemma ein neues Büschel $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \dots)$ construieren, das dem vorhergehenden projectivisch ist, deszen Curven bezüglich den Büscheln $(UL, U'L', \dots)$, $(VL, V'L', \dots)$, ... angehören und so beschaffen sind, dasz das neue Büschel mit dem vorhergehenden $(U'L', V'L', \dots)$ den Ort KLL' erzeugt.

Daraus folgt, dasz die beiden projectivischen Büschel ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, ...) und (U', V', ...) den Ort KL erzeugen.

Wir setzen jetzt voraus, alle Curven des Büschels (U, V, ...) berührten eine und dieselben Gerade R in demselben Puncte o, und V sei die Curve, für welche o ein Doppelpunct ist. Die entsprechende Curve V' gehe ebenfalls durch o. Dann hat die Curve K in o einen Doppelpunct, und wir suchen jetzt die beiden Tangenten zu bestimmen.

Man wähle für L eine Linie, die nicht durch o geht, und L' sei aus der Geraden R und einer ebenfalls nicht durch o gehenden Curve zusamengesetzt. In diesem Falle haben die Curven des Büschels (UL, $U'L'$, ...) in o dieselbe Tangente R, und man nehme jetzt für $\mathfrak{U}$ die Curve dieses Büschels, welche zweimal durch o geht. Der Punct o ist für die beiden Curven VL, $V'L'$ ein Doppelpunct, er ist es also auch für alle Curven des Büschels (VL, $V'L'$), unter denen sich auch $\mathfrak{V}$ befindet. Die Curve K wird gleichzeitig mit L durch die Büschel (U', V'), ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$) erzeugt, und deshalb sind nach Nr. 52., wenn man $r = 0$, $r' = 2$ setzt, die Tangenten von K in o die Tangenten derjenigen Curve $\mathfrak{V}$ des zweiten Büschels im nämlichen Puncte, welche derjenigen Curve V' des ersten Büschels entspricht, die durch o geht.

Da $\mathfrak{V}$ dem Büschel (VL, $V'L'$) angehört, so sind die beiden Tangenten in o an K conjugierte Elemente in einer quadratischen Involution, in der die Tangenten von V unter sich conugiert sind, und die Tangente von V der conjugierte Stral von R.

Zu Nr. 69c.

Der Satz in Nr. 14. genügt zur Bestimmung des Ausspruches in Nr. 69*c*. unmittelbar nur dann, wenn die Fundamentalcurve ein System von Geraden ist, die durch denselben Punct gehen. Wir haben daher die Verpflichtung, hier einen allgemeinen und vollständigen Beweis zu liefern. Zu demselben setzen wir, wie es erlaubt ist, folgende Lemmata voraus:

Lemma I. *Die Polare* (es werden hier stets *erste* Po-

laren verstanden) *eines beliebigen Poles geht durch die Doppelpuncte der Fundamentalcurve.* (Dies folgt unmittelbar aus Nr. 16.).

Lemma 2. *Die Polaren eines gegebenen Punctes in Bezug auf die Curven eines Büschels bilden ein anderes Büschel* (Nr. 84 *a.*).

Lemma 3. *Ist die Fundamentalcurve aus einer Geraden und einer andern Curve zusammengesetzt, und der Pol wird auf eben dieser Geraden angenommen, so ist die Polare aus der gegebenen Geraden und aus der Polare in Bezug auf die zweite Curve zusammengesetzt.* (Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Polaren und aus Nr. 17.)

Lemma 4. *Lässt man durch die n^2 Puncte, in denen eine Curve der n-ten Ordnung durch n Gerade, die durch einen Punct o gehen, geschnitten wird, eine zweite Curve derselben Ordnung hindurchgehen, so hat der Punct o für beide Curven dieselbe Polare.* (Dies folgt augenblicklich, da die Polaren von o in Bezug auf beide Curven auf jeder der n gegebenen Geraden $n-1$ Puncte gemein haben).

Es sei also jetzt eine Fundamentalcurve C_n der n-ten Ordnung und zwei beliebige Puncte o und o' gegeben. Wir bezeichnen durch $P_{oo'}$ die Polare von o in Bezug auf die Polare von o' und dem analog durch $P_{o'o}$ die Polare von o' in Bezug auf die Polare von o und wollen nun beweisen, dasz die Curven $P_{oo'}$ und $P_{o'o}$ zusammenfallen.

Man ziehe durch o' eine beliebige Gerade R, und es sei J_n das Büschel der n Geraden, die von o nach den n Durchschnittspuncten von C_n und R gezogen werden können. Die überbleibenden $n(n-1)$ Durchschnittspuncte der Orte C_n und J_n liegen nach Nr. 43*b.* alle auf einer Curve C_{n-1} der $(n-1)$-ten Ordnung. Da C_n dem Büschel (J_n, RC_{n-1}) angehört, so gehört die Polare von o' in Bezug auf C_n nach Lemma 2. zu dem Büschel $(\varphi_{n-1}, R\Gamma_{n-2})$, worin φ_{n-1} das Büschel der $n-1$ nach Nr. 20. in o zusammenlaufenden Geraden bezeichnet, die die Polare von o in Bezug auf J_n bilden, und Γ_{n-2} die Polare von o' in Bezug auf C_{n-1} ist. Diese Curve Γ_{n-2} bildet nach Lemma 3. mit R

zusammen die Polare von o' in Bezug auf die zusammengesetzte Curve RC_{n-1}. Gemäsz Lemma 4. folgt ferner, dasz die Curve $P_{oo'}$ nichts Anderes ist, als die Polare von o in Bezug auf $R\Gamma_{n-2}$, das heiszt, sie geht nach Lemma 1. durch die $n-2$ Durchschnittspuncte von Γ_{n-2} und R.

Da C_n dem Büschel (J_n, RC_{n-1}) angehört, so fällt nach Lemma 4. die Polare von o in Bezug auf C_n mit der Polare von o in Bezug auf RC_{n-1} zusammen und geht folglich nach Lemma 1. durch die $n-1$ Durschschnittspuncte von C_{n-1} und R. Die Curve $P_{o'o}$ geht daher durch die $n-2$ harmonischen Mittelpuncte des durch die Durchschnittspuncte von C_{n-1} und R gebildeten Systems in Bezug auf den Pol o', das heiszt, sie geht auch durch die $n-2$ Durchschnittspuncte der Curve Γ_{n-2} mit R.

Aus Allem folgt, dasz die Polaren $P_{oo'}$ und $P_{o'o}$ $n-2$ Puncte auf einer beliebigen, durch den Punct o' gelegten Transversale gemein haben. Diese beiden Polaren fallen daher in eine einzige Curve der $(n-2)$-ten Ordnung zusammen.

Es seien nun $o, o', o'', \ldots, o^{(\mu)}$, $\mu+1$ beliebige Puncte der Ebene, und man bezeichne durch $P_{oo'o''}$ die Polare von o in Bezug auf $P_{o'o''}$, durch $P_{oo'o''o'''}$ die Polare von o in Bezug auf $P_{o'o''o'''}$, u. s. w. Aus dem eben bewiesenen Satze erhält man dann augenblicklich, dasz die Polare $P_{o'o''o'''\ldots o^{(\mu)}}$ dieselbe Curve bleibt, in welcher Ordnung man auch die Pole $o, o', o'', \ldots, o^{(\mu)}$ nimmt. Nimmt man jetzt noch an, dasz r dieser Puncte in einen o zusammenfallen, und die überbleibenden $\mu+1-r=r'$ sich ebenfalls in einen o' vereinigen, so hat man den allgemeinen Satz:

Lehrsatz. *Für eine beliebige Fundamentalcurve fällt die r-te Polare eines Punctes o in Bezug auf die r'-te Polare eines andern Punctes o' mit der r'-ten Polare von o' in Bezug auf die r-te Polare von o zusammen*).*

---

*) Bei diesen und andern Zusätzen bin ich sehr wirksam durch die lehrreiche Correspondenz mit meinem berühmten Freunde *Dr. Hirst* gefördert worden, deszen freundliche Unterstützung ich hier dankend anerkenne.

Zu Nr. 88.

Bezüglich der Bestimmung der Doppelpuncte eines Büschels, wollen wir den schon betrachteten Fällen Nr. 88 *a.*, *b.*, *c.* andere von etwas allgemeinerem Charakter hinzufügen.

α. Die Curven des gegebenen Büschels n-ter Ordnung haben einen r-fachen Punct o gemein, und o', o'' seien zwei beliebig auf der Ebene festgelegte Puncte. Die Polaren von o in Bezug auf die gegebenen Curven haben in o einen r-fachen Punct mit denselben Tangenten als die gegebene Curve, und diese Tangenten bilden eine Involution des r-ten Grades. Die Polaren von o' haben dagegen in o einen $(r-1)$-fachen Punct und ihre Tangenten werden in einer Involution des $(r-1)$-ten Grades gruppiert sein. Die beiden Involutionen sind projectivisch, und eine beliebige Gruppe der zweiten ist nach Nr. 74. die Polare von o' in Bezug auf das Geradenbüschel, das die entsprechende Gruppe der ersten bildet.

Die Polarenbüschel von o und o' in Bezug auf die gegebene Curven erzeugen eine Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung, die in o einen $(2r-1)$-fachen Punct hat, und deren Tangenten die nach Nr. 52. beiden Involutionen gemeinschaftlichen Stralen bilden. Diese gemeinschaftlichen Stralen sind nach Nr. 19. offenbar die Gerade oo' und die Doppelstralen der Involution r-ten Grades.

Dem entsprechend erzeugen die Polare von o und o'' eine zweite Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung, die $(2r-1)$-mal durch o geht und dort von der Geraden oo'' und den Doppelstralen der obenerwähnten Involution r-ten Grades berührt wird.

Da nun die beiden Curven der $2(n-1)$ten Ordnung einen $(2r-1)$-fachen Punct o und in ihm $2(r-1)$ gemeinschaftliche Tangenten haben, so zählt o für $(2r-1)^2+2(r-1)$ ihrer Durchschnittspuncte. Aber o gilt auch für r^2 Basispuncte des Polarenbüschels von o; folglich hat man, da

$$(2r-1)^2+2(r-1)-r^2=(r-1)(3r+1)$$

ist, den Satz:

Lehrsatz I. *Wenn die Curven eines Büschels einen*

r-fachen Punct gemein haben, so zählt dieser für $(r-1)(3r+1)$ *Doppelpuncte des Büschels*).*

β. Wir setzen jetzt voraus, dasz die gegebenen Curven im gemeinschaftlichen r-fachen Puncte o dieselben r Tangenten haben, in welchem Falle eine von ihnen, C_n, $r+1$ Zweige hat, die sich in o schneiden.

Die Polaren von o haben in o einen r-fachen Punct mit denselben Tangenten, wie die gegebenen Curven, die Polare von C_n aber wird in o einen $(r+1)$-fachen Punct haben. Die Polaren von o' haben in o einen $(r-1)$-fachen Punct mit Allen gemeinschaftlichen Tangenten. Diese sind die Geraden, welche in Bezug auf das Tangentenbüschel der gegebenen Curven in o die Polare von o' bilden. Die Polare in Bezug auf C_n aber geht r-mal durch o. Die beiden Polarenbüschel erzeugen also nach Nr. 51. eine Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung mit einem $2r$-fachen Puncte in o.

Dem entsprechend erzeugen die Polaren von o und o'' eine zweite Curve derselben Ordnung, die eine gleiche Anzahl mal durch o geht und folglich $4r^2$ Durchschnittspuncte mit der ersten Curve hat, die sämmtlich mit o zusammenfallen. Aber o gilt für r^2+r Basispuncte des Polarenbüschels für o, und o stellt daher $r(3r-1)$ Doppelpuncte des gegebenen Büschels vor.

Fallen von den gemeinschaftlichen Tangenten durch o s in eine einzige Gerade R zusammen, so berührt diese in o nach Nr. 74. s Zweige jeder Polare von o und $s-1$ Zweige jeder Polare von o' und o'', und folglich hat auch jede der Curven $2(n-1)$-ter Ordnung $s-1$ in o mit R zusammenfallende Tangenten. In diesem Falle vereinigt also o $4r^2+s-1$ Durchschnittspuncte dieser Curven. Das heiszt:

Lehrsatz II. *Haben die Curven eines Büschels ausser einem r-fachen Punct alle Tangenten in diesem Puncte gemein, und fallen von den letzeren s in eine Gerade zusammen, so zählt dieser Punct für* $r(3r-1)+s-1$ *Doppelpuncte des Büschels.*

---

*) In Bezug auf den einfachsten Fall dieses und des folgenden Lehrsatzes sehe man *Cayley: Nouvelles récherches sur l'élimination et la théorie des courbes* (*Crelles* Journal. T. 63. Berlin, Reimer, 1863, S. 34.).

Ist $s = r$, das heisst, fallen die Tangenten aller Curven in o in eine einzige Gerade zusammen, so zählt o für $3r^2 - 1$ Doppelpuncte.

γ. Man setze nun voraus, dasz eine einzige Curve C_n unter den gegebenen r-mal durch einen Punct o gehe und in ihm s mit der Geraden R zusammenfallende Tangenten habe. Dann hat die Polare von o in Bezug auf C_n r Zweige, die durch o gehen und mit C_n dieselben Tangenten haben. Die Polare eines beliebigen Punctes o' in Bezug auf C_n hat in o einen $(r-1)$-fachen Punct mit $s-1$ mit R zusammenfallenden Tangenten. Die Büschel der Polaren von o und o' erzeugen daher eine Curve der $2(n-1)$-ten Ordnung, die in o nach Nr. 51 g. einen $(r-1)$-fachen Punct mit $s-1$ auf R fallenden Tangenten hat. Eine entsprechende Curve und mit denselben Eigenschaften ausgestattet entsteht durch die Polarenbüschel von o und einen zweiten beliebigen Punct o'', und für diese beiden Curven $2(n-1)$-ter Ordnung repräsentiert der Punct o $(r-1)^2 + s - 1$ Durchschnittspuncte, daher gilt der Satz:

Lehrsatz III. *Gibt es in einem Curvenbüschel eine Curve, die einen r-fachen Punct mit s zusammenfallenden Tangenten besitzt, so ist dieser Punct der Ort für $(r-1)^2 + s - 1$ Doppelpuncte des Büschels.*

δ. Liegt o, der r-fache Punct von C_n, auf allen Curven des Büschels, die dann in ihm alle eine gemeinschaftliche Tangente haben, so gehen die Polaren von o sämmtlich durch o; dieser Punct ist also für jede der Curven $2(n-1)$-ter Ordnung, die durch die Polarenbüschel entstehen, ein r-facher Punct. Diese Curven haben daher $r^2 + s - 1$ in o vereinigte Durchschnittspuncte. Der Punct zählt nun auch für r Basispuncte des Polarenbüschels von o, und folglich gilt:

Lehrsatz IV. *Geht eine Curve eines Büschels r-mal durch einen der Basispuncte und hat dort s zusammenfallende Tangenten, so zählt dieser Punct für $r^2 - r + s - 1$ Doppelpuncte des Büschels.*

Unter Anwendung der beiden letzten Sätze laszen die Betrachtungen der Nr. 121. sich folgendermaszen aussprechen:

Lehrsatz V. *Hat in Bezug auf eine gegebene Fundamentalcurve eine erste Polare einen r-fachen Punct p mit s zusammenfallenden Tangenten, so hat die Curve von* Steiner $(r-1)^2+s-1$ *im Pole dieser Polaren sich kreuzende Zweige, die in ihm von der geraden Polare von p berührt werden, welche dort mit der Curve von* Steiner *selbst eine* $[r^2-r+s-1]$*-punctige Berührung eingeht.*

Zu Nr. 111 *bis a.*

Nach Theorem III. S. 170. schalte man Folgendes ein:

Die Kegelschnitte also, die durch zwei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene Curven n-ter und n_1-ter Ordnung berühren, bilden eine Reihe vom Index $n.n_1(n+1)(n_1+1)$. Da in diesem Falle die Gerade, welche die zwei gegebenen Puncte verbindet, als ein System zweier zusammenfallender Geraden betrachtet, ebenfalls eine Curve der Reihe darstellen kann, die eine beliebige gegebene Gerade berührt, so ist der Wert $2M$ der Zahl M' einer Reduction fähig.

Um dieselbe zu bestimmen, erinnern wir daran, dasz die Kegelschnitte, die durch zwei gegebene Puncte gehen, oder zwei gegebene Geraden berühren, eine Reihe vom Index 4 bilden, in welcher statt acht nur vier wirkliche Kegelschnitte existieren, die eine dritte Gerade berühren. Wenn die Gerade, welche die gegebenen Puncte verbindet, die beiden gegebenen Geraden in a und b schneidet, so ist der Abschnitt ab, als ein Kegelschnitt, deszen eine Dimension Null wird, betrachtet, Tangente der gegebenen Geraden in a und b, und bleibt auch Tangente jeder beliebigen dritten Geraden. Sie repräsentiert daher als solche, vier zusammenfallende Auflösungen der Aufgabe: durch zwei gegebene Puncte einen Kegelschnitt zu legen, der die beiden gegebenen und eine dritte Gerade berührt. Es ist also natürlich zu schlieszen, dasz, wenn man an Stelle der beiden gegebenen Geraden zwei Curven der n-ten und n_1-ten Ordnung hat, die Reduction der Zahl $2M$ gleich $4n.n_1$ ist, da $n.n_1$ die Zahl der Punctepaare ist, in denen die gegebenen Curven von der Geraden, welche durch die gegebenen Puncte geht, geschnitten wird. Suchen wir diese Behauptung zu beweisen.

I.

Ueber geometrische Netze.

Kann ein Curvennetz n-ter Ordnung im Allgemeinen ein Netz von ersten Polaren sein? Da ein Netz durch drei Curven bestimmt ist, so ist zu entscheiden, ob man, wenn drei Curven A_1, A_2, A_3 n-ter Ordnung und nicht zu demselben Büschel gehörig gegeben sind, drei Puncte a_1, a_2, a_3 nicht in gerader Linie, so wie eine Curve $(n+1)$-ter Ordnung der Art bestimmen kann, dasz in Bezug auf die letzte Curve die Curven A_1, A_2, A_3 die ersten Polaren von a_1, a_2, a_3 sind.

Die Fundamentalcurve und die drei Pole hängen von $\frac{1}{2}(n+1)(n+4)+6$ Bedingungen ab; umgekehrt verlangt die Identität der gegebenen Curven A_1, A_2, A_3 mit den Polaren von a_1, a_2, a_3 die Erfüllung von $\frac{3}{2}n(n+3)$ Bedingungen. Die Differenz zwischen ihnen, $(n-2)(n+4)$, ist nur für $n=2$ Null. Daher ist, mit Ausnahme des Falles $n=2$, den wir im Folgenden speciell für sich behandeln werden, ein Curvennetz im Allgemeinen kein Netz von ersten Polaren.

Wir betrachten daher ein vollständig allgemeines Netz, das durch drei Curven A_1, A_2, A_3 n-ter Ordnung bestimmt ist, und es sei A_0 eine andere Curve des Netzes der Art, dasz zwei beliebige der vier Curven A_0, A_1, A_2, A_3 nicht zu einem Büschel gehören. Wir fixieren beliebig in der Ebene vier Puncte a_0, a_1, a_2, a_3, von denen niemals je drei in einer Geraden liegen, und betrachten sie als den Curven A_0, A_1, A_2, A_3 entsprechend. Man kann jetzt die Puncte der Ebene und die Curven des Netzes sich der Art entsprechen laszen, dasz man die Bedingung festsetzt, dasz Puncten in gerader Linie Curven eines Büschels entsprechen, welches daher auch der Punctreihe projectivisch ist. Betrachten wir zuerst eine Gerade, die zwei der gegebenen Puncte z. B. a_0, a_1 verbindet, so ist die Projectivität

zwischen den Puncten der Geraden $a_0 a_1$ und den Curven des Büschels $A_0 A_1$ durch die Bedingungen bestimmt, dasz den Puncten a_0, a_1 die Curven A_0, A_1, und dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der Geraden $a_0 a_1$, $a_2 a_3$ die den Büscheln $A_0 A_1$, $A_2 A_3$ gemeinschaftliche Curve entspreche. Daraus folgt noch, dasz einem anderen Puncte der Geraden $a_0 a_1$ eine vollständig individualisierte Curve des Büschels $A_0 A_1$ entspricht und umgekehrt.

Man betrachte für eine Gerade R die Puncte, in denen dieselbe drei Seiten des Vierecks $a_0 a_1 a_2 a_3$ schneidet. Diesen drei Puncten entsprechen drei schon bestimmte Curven des Netzes, die demselben Büschel zugehören und folglich entspricht einem beliebigen Puncte von R eine völlig individualisierte Curve desselben Büschels und umgekehrt. Die Curve A, die einem gegebenen Punct a entspricht, findet man, indem man ihn als Durchschnittspunct zweier Geraden R, R' betrachtet, die man der Einfachheit wegen durch zwei der gegebenen Puncte ziehen kann, und dann die Curve nimmt, welche den beiden Büscheln, die zu den Geraden gehören, gemeinschaftlich sind.

Auf diese Art entspricht einem Puncte a eine feste Curve A des Netzes, die nämlich, welche allen Büscheln gemein ist, die zu Geraden, welche sich in a schneiden, gehören, und umgekehrt entspricht einer Curve A des Netzes ein völlig individualisierter Punct a, nämlich der, welcher allen Geraden gemein ist, welche zu Büscheln gehören, die die Curve A enthalten.

Alle Curven des Netzes, die durch denselben Punct a gehen, bilden ein Büschel und entsprechen also den Puncten einer Geraden D, und umgekehrt, diese Gerade enthält die Puncte, welche Curven des Netzes entsprechen, die durch n^2 feste Puncte gehen, deren einer a ist. Wir können also sagen, dasz einem beliebigen Puncte a eine feste Gerade D entspricht, der Ort der Puncte, deren Curven A durch a gehen, dasz aber umgekehrt einer beliebigen festen Geraden D nicht ein, sondern n^2 Puncte entsprechen, die die Basis des Büschels von Curven A bilden, welche den Puncten von D entsprechen.

Einem Puncte der Ebene entsprechen also eine Curve des Netzes und eine Gerade und umgekehrt einer Curve des Netzes

entspricht ein einziger bestimmter Punct, aber einer Geraden n^2 Puncte. Aus dem Vorhergehenden folgt nun:

Lehrsatz I. *Geht die Curve A eines Punctes a durch einen zweiten Punct a', so geht umgekehrt die Gerade D von a' durch a und vice versa.*

Was ist der Ort der Puncte, die auf den entsprechenden Curven A, oder auch nach Lehrsatz I. auf den correspondierenden Geraden D liegen? Es sei R eine beliebige Transversale. Einem Puncte a derselben entspricht eine Curve A des Netzes die R in n Puncten α schneidet. Nimmt man umgekehrt einen Punct α auf R, so entsprechen die Curven A, die durch α gehen, den Puncten einer bestimmten Geraden D, die R in einem Puncte a schneidet. Das heiszt, einem Puncte a entsprechen n Puncte α, während einem Puncte α nur ein einziger Punct a entspricht. Es gibt folglich $n+1$ Puncte a, deren jeder mit einem der entsprechenden Puncte α zusammenfällt, daher gilt:

Lehrsatz II. *Der Ort eines Punctes, der auf der entsprechenden Curve A liegt, ist eine Curve K der $(n+1)$-ten Ordnung.*

Was ist die Einhüllende der Geraden D, deren jede einen der correspondierenden Puncte enthält? Es sei i ein beliebiger Punct, dann haben die Geraden, die durch i gehen, nach Lehrsatz I. ihre entsprechenden Puncte auf der i entsprechenden Curve A, welche nach Lehrsatz II. die Curve K in $n(n+1)$ Puncten schneidet, und auf der die Gerade, welche einen dieser Puncte mit i verbindet, einen ihrer entsprechenden Puncte hat. Folglich gilt:

Lehrsatz III. *Die Einhüllende einer Geraden D, die durch einen der n^2 Puncte geht, die ihr entsprechen, ist eine Curve H der $n(n+1)$-ten Classe.*

Der Punct i gehört der Curve H an, wenn zwei der Geraden, welche i mit den Durchschnittspuncten der Curve K und A, welche letztere i entspricht, verbindet, zusammenfallen, das heiszt, wenn die letzte Curve K berührt. Daraus entsteht:

Lehrsatz IV. *Die Curve H ist die Einhüllende der Geraden D, die den Puncten der Curve K entsprechen,*

und gleichzeitig der Ort der Puncte, welche denjenigen Curven A entsprechen, die K berühren.

Sind die Curven A die ersten Polaren ihrer entsprechenden Puncte in Bezug auf eine Fundamentalcurve, so fallen die Curven H und K mit letzerer zusammen *).

Aber auch in dem allgemeinsten Falle bestehen zum gröszten Teile die Eigenschaften, die in diesem Werke für ein System von ersten Polaren bewiesen sind, und bleiben selbst bis auf den Beweis unverändert. Dies kommt vorzugsweise daher, dasz diese Eigenschaften und Beweise fast alle nicht sowol von dem polarischen Zusammenhange der Curven des Netzes mit einer Fundamentalcurve abhängen, als vielmehr von der *linearischen* Bestimmbarkeit derselben mittelst nur drei von ihnen. Man hat daher für ein beliebiges geometrisches Curvennetz folgende allgemeine Sätze, die man mit Zuhilfenahme der Erklärung eines Netzes und des Lehrsatz I. beweisen kann:

Lehrsatz V. *Durchläuft ein Punct eine Curve C_m der m-ten Ordnung, so wird die entsprechende Gerade D von einer Curve L der m.n-ten Classe umhüllt, die auch der Ort eines Punctes ist, dem eine Curve A, die C_m berührt, entspricht.*

Hat C_m keine vielfachen Puncte, so ist die Ordnungszahl von L gleich $m(m+2n-3)$; diese Zahl vermindert sich aber um $r+s-1$, wenn C_m einen r-fachen Punct mit s zusammenfallenden Tangenten hat.

Aus diesem Satze folgt, dasz die Zahl der Curven A, die zwei Curven C_m, $C_{m'}$ berühren, gleich der Anzahl der Durchschnittspuncte der beiden entsprechenden Curven L ist, deren Ordnungszahlen gefunden sind.

Den Spitzen von C_m entsprechen Wendepuncte von L, und da man so die Classe, die Ordnung und die Zahl der Wendepuncte dieser Curve kennt, so kann man mittelst der Formeln von *Plücker* die Zahl der Doppelpuncte, der Dopeltan-

---

*) Für den Fall $n=1$ sehe man: *Plücker*, *System der analytischen Geometrie*, S. 78.

genten und der Spitzen berechnen. Diese Zahlen nun laszen erkennen, wie viele Curven A eine doppelte Berührung, und wie viele eine dreipunctige Berührung mit der gegebenen Linie C_m eingehen (M. s. Nr. 103.).

Lehrsatz VI. *Der Ort eines Punctes p, deszen gerade Polaren in Bezug auf die Curven A eines Netzes durch denselben Punct o gehen, ist eine Curve der $3(n-1)$-ten Ordnung, die man nach Nr. 95. die Curve von Jacobi des Netzes nennen kann, und die sich auch nach Nr. 90 a. als Ort der Berührungspuncte zwischen den Curven des Netzes definieren lässt, oder als Ort der Doppelpunte derselben Curven.*

Lehrsatz VII. *Der Ort der Puncte o, in denen sich die geraden Polaren eines und desselben Punctes p schneiden in Bezug auf die Curven des Netzes, ist eine Curve der $3(n-1)^2$-ten Ordnung, die man Curve von Steiner des Netzes nennt (M. s. Nr. 98 a.).*

Daher entspricht jedem Puncte p der Curve Jacobis ein Punct o der Steinerschen Curve und umgekehrt, und die Einhüllende der Geraden po, welche die gemeinschaftliche Tangente der Curven des Netzes in p ist, die durch diesen Punct gehen, ist eine Cuvre der $3n(n-1)$-ten Classe (Nr. 98 b.).

Lehrsatz VIII. *Der Ort eines Punctes a, dem eine Curve A mit einem Doppelpunct p entspricht, ist eine Curve Σ der $3(n-1)^2$-ten Ordnung.*

Die Curve Σ fällt mit der Curve von Steiner zusammen, wenn die Curven A die ersten Polaren der entsprechenden Puncte a in Bezug auf ein und dieselbe Fundamentalcurve sind. (M. s. Nr. 88 d.).

Die Gerade D, welche dem Punct p entspricht, berührt nach Nr. 118. in a die Curve Σ, das heiszt:

Lehrsatz X. *Die Curve Σ ist die Einhüllende der Geraden D, die den Puncten der Curve von Jacobi entsprechen.*

Aus diesem Satze und Lehrsatz V. leitet man rasch die

Classe der Curve Σ ab und auszerdem die übrigen Singularitäten, und hieraus erschlieszt man augenblicklich die im Texte Nr. 119—121. gegebenen Formeln, durch welche ausgedrückt wird:

wie viel Curvenbüschel sich in zwei verschiedenen Puncten berühren,

wie viel Büschel unter sich eine dreipunctige Berührung eingehen,

wie viel Curven mit zwei Doppelpuncten, und

wie viel Curven mit Spitzen in einem beliebigen geometrischen Netze sich befinden.

Bei dieser Aufgabe bemerke man, dasz die im Texte gegebenen Zahlen die Curve *Jacobis* ohne jeden vielfachen Punct vorauszusetzen. Die Veränderungen jedoch, welche diese Resultate erleiden, wenn die Curve *Jacobis* selbst vielfache Puncte besitzt, sind leicht nachzuweisen.

Haben die Curven eines Netzes d gemeinschaftliche Puncte mit verschiedenen Tangenten und weitere k Puncte gemein, in denen sie sich berühren, so hat nach Nr. 96, 97. die Curve *Jacobis* in jenem d Doppelpuncte und in diesem k dreifache Puncte und in jedem der letzteren zwei Tangenten, die mit der den Curven des Netzes gemeinschaftlichen Tangente zusammenfallen. Daraus folgt, dasz diese Puncte $2d+4k$ Durchschnittspuncten der Curve *Jacabis* mit einer beliebigen Curve des Netzes gleich gelten, und die Classe der Curve Σ ist also nach Nr. 118*b*. gleich $3n(n-1)-2d+3k$.

Wir setzen jetzt voraus, dasz, abgesehen von den gemeinschaftlichen Puncten der Curven des Netzes, die Curve *Jacobis* andere δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen besitze. Dann wird nach Nr. 103. die Ordnung des Ortes der Puncte, deren Curven A entsprechen, welche die Curve *Jacobis* berühren, gleich sein:

$$3(n-1)(5n-6)-2(d+\delta)-3\varkappa-4k.$$

Folglich ist die Zahl der Wendetangenten von Σ nach Nr. 118*d*. gleich

$$3(n-1)(4n-5)-2(d+\delta)-3\varkappa-4k,$$

und hieraus schlieszt man mittelst der Formeln *Plückers* weiter auf die andern Singularitäten derselben Curve.

Haben die Curven des Netzes einen r-fachen Punct gemein, so ist derselbe für die Curve *Jacobis* ein $(3r-1)$-facher Punct, wie man leicht mittelst der Betrachtungen der Nr. 96. beweisen kann, er wird also die Classe der Curve Σ um $r(3r-1)$ Einheiten vermindern. Da ferner ein beliebiges Curvenbüschel des Netzes, auszer dem gegebenen Puncte nur

$$3(n-1)^2-(r-1)(3r+1)$$

Doppelpuncte zuläszt (m. s. den Zusatz zu Nr. 88.), so vermindert sich nach Nr. 88*d*. auch die Ordnung von Σ in unserm Falle um $(r-1)(3r-1)$ Einheiten. U. s. w., u. s. w.

Lehrsatz X. *Schneidet eine Curve C_m die Curve Jacobis in $3m(n-1)$ Puncten p, so wird die Curve Σ in den $3m(n-1)$ entsprechenden Puncten a nach Nr. 122. von dem Orte der Puncte berührt, deren Curven A die C_m berühren.*

U. s. w., u. s. w.

Wir beschlieszen diese Bemerkungen, indem wir einige ganz specielle Beispiele geometrischer Netze betrachten, bei welchen die Bestimmung der Curve *Jacobis* sehr leicht ist.

1. Die Curven des Netzes seien von der vierten Ordnung und mögen drei Doppelpuncte d_1, d_2, d_3 und drei einfache Puncte s_1, s_2, s_3 gemein haben. Ist m ein Punct der Geraden d_1d_2, so stellen diese Gerade und die Curve der dritten Ordnung, die in d_3 einen Doppelpunct hat und durch die Puncte m, d_1, d_2, s_1, s_2, s_3 geht, zusammen eine Curve des Netzes vor, die in m einen Doppelpunct hat. Ist m ferner ein Punct des Kegelschnittes $d_1d_2d_3s_1s_2$, so bildet ebenso dieser mit dem Kegelschnitt $d_1d_2d_3s_3m$ eine Curve des Netzes mit einem Doppelpuncte in m. Folglich bilden die drei Seiten des Dreiecks $d_1d_2d_3$ und die drei Kegelschnitte, die demselben Dreieck umgeschrieben und bezüglich durch je zwei Scheitel des zweiten Dreiecks $s_1s_2s_3$ beschrieben sind, zusammen die Curve *Jacobis* des Netzes.

Die Curven des Netzes, die durch einen und denselben Punct a gehen, bilden ein Büschel, in welchem sechs Curven existieren, die einen Doppelpunct haben (auszer den gegebenen

Puncten), nämlich drei Systeme aus einer Geraden und einer Curve dritter Ordnung und drei Systeme aus zwei Kegelschnitten. Man kann nämlich die Gerade d_1d_2 mit der Curve dritter Ordnung, die einen Doppelpunct in d_3 hat und durch a, d_1, d_2, s_1, s_2, s_3 geht, combinieren oder den Kegelschnitt $d_1d_2d_3s_1s_2$ mit dem Kegelschnitt $d_1d_2d_3s_3a$, u. s. w.

2. Die Curven des Netzes seien von der fünften Ordnung und mögen sechs Doppelpuncte d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 gemein haben. Ist m ein Punct des Kegelschnitts $d_1d_2d_3d_4d_5$, so stellt dieser zusammen mit der Curve dritter Ordnung, die einen Doppelpunct in d_6 hat und durch m, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 geht, eine Curve des Netzes mit einem Doppelpuncte in m dar. Die Curve *Jacobis* des Netzes ist daher das System der sechs Kegelschnitte, die man durch die gegebenen Puncte d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 beschreiben kann, wenn man sie zu je fünf und fünf combiniert.

Ein Büschel des Netzes enthält sechs Curven mit einem Doppelpuncte, deren jede das System eines Kegelschnitts und einer Curve dritter Ordnung ist.

3. Die Curven des Netzes seien von der fünften Ordnung und mögen einen dreifachen Punct t, drei Doppelpuncte d_1, d_2, d_3 und drei einfache Puncte s_1, s_2, s_3 gemein haben. Ist m ein Punct der Geraden td_1, und man combiniert sie mit der Curve vierter Ordnung, welche die Doppelpuncte t, d_2, d_3 hat und durch die Puncte m, d_1, s_1, s_2, s_3 geht; oder ist m ein Punct des Kegelschnittes $td_1d_2d_3s_1$, und man combiniert diesen mit der Curve dritter Ordnung, die durch d_1, d_2, d_3, m, s_2, s_3 und zweimal durch t geht; oder ist endlich m ein Punct der Curve dritter Ordnung, die einen Doppelpunct in t hat und durch d_1, d_2, d_3, s_1, s_2, s_3 geht, und man combiniert sie mit dem Kegelschnitt $td_1d_2d_3m$; so erhält man in jedem dieser drei Fälle eine Curve des Netzes mit einem Doppelpuncte in m. Folglich bilden die drei Geraden $t(d_1, d_2, d_3)$, die drei Kegelschnitte $td_1d_2d_3(s_1, s_2, s_3)$ und die Curve dritter Ordnung, die durch d_1, d_2, d_3, s_1, s_2, s_3 geht und einen dreifachen Punct in t hat, zusammen die Curve von *Jacobi* des Netzes.

Ein Büschel des Netzes enthält sieben Curven mit einem

Doppelpuncte, nämlich drei Systeme aus einer Geraden und einer Curve vierter Ordnung und vier Systeme aus einem Kegelschnitt und einer Curve dritter Ordnung.

4. Die Curven des Netzes seien von der n-ten Ordnung und haben einen $(n-1)$-fachen Punct o und $2(n-1)$ einfache Puncte $s_1, s_2, \ldots, s_{2(n-1)}$ gemein*). Ist m ein Punct der Geraden os_1, und man combiniert diese Gerade mit der Curve $(n-1)$-ter Ordnung, die in o einen $(n-2)$-fachen Punct hat und durch m, $s_2, s_3, \ldots, s_{2(n-1)}$ geht, oder wenn m ein Punct der Curve C_{n-1} der $(n-1)$-ten Ordnung ist, die einmal durch $s_1, s_2, \ldots, s_{2(n-1)}$ und $(n-2)$-mal durch o geht, und man diese Curve mit der Geraden mo combiniert, in jedem dieser Fälle erhält man eine Curve des Netzes mit einem Doppelpuncte in m. Die $2(n-1)$ Geraden $o(s_1, s_2, \ldots, s_{2(n-1)})$ und die Curve C_{n-1} bilden daher gemeinschaftlich die Curve von *Jacobi* für das Netz.

Betrachtet man das Curvenbüschel des Netzes, das durch einen weiteren beliebigen Punct s_0 gehen musz, so zerfällt, wenn eine Curve dieses Büschels einen Doppelpunct auszer dem $(n-1)$-fachen Puncte o hat, diese nothwendigerweise in eine Gerade und in eine Curve $(n-1)$-ter Ordnung. Und wirklich, verbindet man die Curve K^r der $(n-1)$-ten Ordnung, die $(n-2)$-mal durch o und auszerdem durch die Puncte $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2(n-1)}$ mit Ausnahme des einen s_r geht, mit der Geraden, die diesen ausgelaszenen Punct mit o verbindet, so hat man offenbar eine Curve des Büschels, welche auszer in o im Durchschnittspuncte der Curve K^r mit der Geraden os_r einen Doppelpunct hat. Auf diese Weise erhalten wir $2n-1$ Curven des Büschels, die einen Doppelpunct haben, und diese $2n-1$ Doppelpuncte zusammen mit dem $(n-1)$-fachen Punct o, der für $(n-2)(3n-2)$ Doppelpuncte gilt (m. s. den Zusatz zu Nr. 88), geben genau die $3(n-1)^2$ Doppelpuncte des Büschels. U. s. w., u. s. w.

---

*) *Cremona*, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Memorie dell' Accademia di Bologna, serie 2ª, tomo 2°, Bologna 1863). — *Jonquières*, *De la transformation géométrique des figures planes*. (Nouvelle Annales de mathématiques, 2ᵉ série, tom. 3ᵉ, Paris 1864). — *Jonquières*, *Du contact des courbes planes etc.* (ibidem).

II.

Ueber Netze von Kegelschnitten.

1. Es ist ein Netz Kegelschnitte gegeben, man betrachtet dasselbe als ein Netz erster Polaren einer unbekannten Curve dritter Ordnung und soll dann die Pole bestimmen.

Es seien A_1, A_2, A_3 drei Kegelschnitte des Netzes, die nicht demselben Büschel angehören. Die beiden ersten seien zwei Paar Gerade, die sich bezüglich in o_1 und o_2 schneiden, der dritte gehe durch o_1 und o_2. Es sei ferner o_3 der dritte Diagonalpunct des durch die vier Durchschnittspuncte von A_1 und A_2 gebildeten Vierecks, und a_1, a_2, a_3 seien die unbekannten Pole der drei gegebenen Kegelschnitte. Da die gerade Polare von a_2 in Bezug auf A_1 mit der geraden Polare von a_1 in Bezug auf A_2 zusammenfallen musz, so ist diese Gerade jedenfalls o_1o_2, und folglich liegen a_1 und a_2 bezüglich in o_2o_3 und o_3o_1. Die Polare von a_1 in Bezug auf A_3 musz gleichzeitig die Polare von a_3 in Bezug auf A_1 sein, das heiszt, sie musz durch o_1 gehen, so dasz a_1 auf der Tangente von A_3 in o_1 liegt. Dem analog liegt a_2 auf der Tangente von A_3 in o_2. Nachdem die Puncte a_1, a_2 construiert sind, seien o_1c_1, o_2c_2 die respectiven Polaren in Bezug auf A_3. Diese Geraden sind dann auch die Polaren von a_3 in Bezug auf A_1 und A_2, und folglich ist a_3 der Punct, in welchem der zu o_1c_1 in Bezug auf die beiden Geraden A_1 harmonisch conjugierte Stral, den zu o_2c_2 in Bezug auf die beiden Geraden A_2 harmonisch conjugierten Stral schneidet.

Nachdem so die Pole der drei Kegelschnitte A_1, A_2, A_3 gefunden sind, so ist der Pol eines andern Kegelschnittes A des Netzes der Pol in Bezug auf A_3 der geraden Polare von a_3 in Bezug auf A.

Auf folgende Weise findet man ferner die Durchschnittspuncte der Fundamentalcurve dritter Ordnung mit einer beliebigen Transversale R. Ist x ein Punct von R, so schneidet seine conische Polare R in zwei Puncten y. Umgekehrt ist, wenn durch einen auf R beliebig angenommenen Punct y die

conische Polare eines Punctes von R geht, der Pol x der Durchschnitt von R mit der geraden Polare von y. Die Puncte y bilden daher eine quadratische Involution, die der einfachen Punctreihe der Puncte x projectivisch ist. Die drei gemeinschaftlichen Puncte der zwei Reihen sind die Puncte von R, welche auf ihren respectiven conischen Polaren liegen, das heiszt, sie sind Puncte der Fundamentalcurve.

2. Wir gelangen jetzt zu speciellen Fällen. Wir nehmen zuerst an, in dem Netze befinde sich ein Kegelschnitt R^2, der aus einer zweimal genommenen Geraden R besteht. Jeder Punct dieser Geraden ist Pol eines Kegelschnittes mit einem Doppelpuncte, auszerdem bilden aber die Polarkegelschnitte der Puncte einer Geraden ein Büschel, es gibt daher in dem Netze ein Büschel, deszen Kegelschnitte sämmtlich einen Doppelpunct haben. Ein solches Büschel ist aber notwendigerweise ein Büschel von Geradenpaaren in Involution, deszen Doppelstralen, jeder doppelt gezählt, zwei neue Kegelschnitte P^2, Q^2 des Netzes bilden. Da nun jeder Punct von R der Pol einer conischen Polare ist, die aus zwei sich im Puncte $P \cdot Q$ schneidenden Geraden besteht, so ist umgekehrt dieser Punct der Pol des Kegelschnittes R^2. Daraus folgt nach Nr. 79., dasz PQR ein Dreiseit ist, von dem jede Seite, doppelt gezählt, die conische Polare des Gegenscheitels ist.

Diese drei Kegelschnitte P^2, Q^2, R^2 genügen in Folge ihrer Specialnatur nicht, um das ganze System der Pole zu individualisieren, das heiszt, die Aufgabe, die Fundamentalcurve zu bestimmen, ist unbestimmt. Dieselbe wird bestimmt, wenn man für einen wirklichen Kegelschnitt des Netzes einen beliebigen Punct, der aber nicht auf den Geraden P, Q, R liegt, als Pol annimmt *).

Der Kegelschnitt des Netzes, der durch zwei gegebene Puncte o, o' geht, bestimmt sich durch die Methode der Nr. 77*a*.

*) Sind nämlich drei Kegelschnitte A, B, C gegeben, die ein und denselben Dreieck conjugiert sind, und sind, wenn a ein beliebiger Punct ist, b und c diejenigen Puncte, deren Polaren in Bezug auf A bezüglich die Polaren von a in Bezug auf B und C sind, so zeigt sich leicht, dasz die Polare von b in Bezug auf C die Polare von c in Bezug auf B ist.

Der Kegelschnitt des Büschels (P^2, Q^2), der durch *o* geht, ist ein Paar Gerade, die mit *P*, *Q* ein harmonisches System bilden; analog ist der Kegelschnitt des Büschels (P^2, R^2), der ebenfalls durch *o* geht, ein Geradenpaar, das mit *P*, *R* ein harmonisches System bildet. Diese beiden Kegelschnitte bestimmen durch ihre gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte ein vollständiges Viereck, deszen Diagonaldreieck *PQR* ist. Der gesuchte Kegelschnitt ist nun derjenige, welcher durch die Scheitel dieses Vierecks und durch *o'* geht. Für ihn ist also *PQR* ein conjugiertes Dreieck. Alle Kegelschnitte des Netzes sind folglich demselben Dreieck conjugiert.

Die Curve von *Hesse* ist in diesem Falle durch die drei Geraden *P*, *Q*, *R* gebildet und es ist folglich nach Nr. 145. die Fundamentalcurve dritter Ordnung äquianharmonisch.

Aus dem Vorhergehenden folgt offenbar, dasz es in dem Netze keinen vierten Kegelschnitt geben kann, der aus einem Paar zusammenfallender Geraden besteht. Jede Gerade nämlich, die zweimal genommen eine conische Polare bildet, ist notwendigerweise ein Teil der Curve von *Hesse*, und diese kann, da sie von der dritten Ordnung ist, nicht mehr als drei Gerade enthalten.

2. Wir haben eben gesehen, dasz, die Existenz eines Kegelschnitts R^2 (eine doppelt genommene Gerade) vorausgesetzt, es nötig ist, damit die Kegelschnitte des Netzes ein System von Polaren bilden, dasz die Puncte der Geraden *R* Pole von Kegelschnitten sind, die aus Geradenpaaren in Involution bestehen. Hat diese Involution zwei von einander und von *R* verschiedene Doppelstralen *P*, *Q*, so haben wir den vorhergehenden Fall der Nr. 2. Wir nehmen also jetzt an, die beiden Doppelstralen fielen zusammen, das heiszt, alle Geradenpaare hätten einen gemeinschaftliche Gerade *P*. In diesem Falle fallen von den drei Seiten des Dreiecks *PQR* zwei *P*, *Q* zusammen (oder die Curve von *Hesse* besteht aus der Geraden *P* zweimal genommen und aus der Geraden *R*). Die Puncte von *P* sind daher Pole von Kegelschnitten, die aus Geradenpaaren bestehen, die mit *P* und *R* harmonisch conjugiert sind. Die Puncte von *R* dagegen sind Pole von Kegelschnitten, die aus einer festen Geraden *P* und einer beweglichen Geraden zusam

mengesetzt sind, die sich um einen festen Punct o von P dreht. Der Punct PR, der beiden Geraden angehört, wird dann der Pol des Kegelschnitts P^2 sein, und der Punct o, der für die conischen Polaren von R ein Doppelpunct ist, hat zur conischen Polare R^2.

Es folgt weiter, dasz alle Kegelschnitte des Netzes P im Puncte PR berühren, und dasz in Bezug auf diese o der Pol der Geraden R ist. Und da der Punct PR die conische Polare P^2 hat, so hat die Fundamentalcurve dritter Ordnung in demselben Puncte eine Spitze mit der Tangente P. Die Gerade R aber, die im vorhergehenden allgemeinern Falle drei Wendepuncte der Curve enthielt, verbindet im gegenwärtigen Falle die Spitze der Curve mit ihrem einzigen Wendepuncte. Die conische Polare des Wendepunctes ist aus der Geraden P und der Wendetangente zusammengesetzt, und der Punct o ist daher der Durchschnittspunct der Tangenten im Wende- und Rückkehrpuncte.

Man gelangt zu dem eben betrachteten Fall auch, indem man annimmt, dasz im allgemeineren Falle der Nr. 2. einer der Doppelstralen der Involution der Geradenpaare, welche die conischen Polaren der Puncte von R bilden, mit dieser Geraden R selbst zusammenfällt. In Summa besteht also der Charakter unseres Falles darin, dasz zwei Seiten des den Kegelschnitten des Netzes conjugierten Dreiecks aufeinander fallen.

4. Es kann der noch speciellere Fall eintreten, dasz die Geraden P, Q, R alle in eine einzige Gerade P zusammenfallen. Dann ist jeder Punct von P der Pol eines Kegelschnittes, der aus der Geraden P selbst und einer zweiten variablen Geraden zusammengesetzt ist, welche sich um einen festen Punct o von P dreht, und o ist der Pol des Kegelschnittes P^2. Alle Puncte von P gehören daher der Fundamentalcurve dritter Ordnung an, die folglich aus der Geraden P und einem Kegelschnitt zusammengesetzt ist, der P in o berührt. Alle Kegelschnitte des Netzes haben in o eine dreipunctige Berührung mit der gemeinschaftlichen Tangente P.

Natürlich ist in diesem Falle die Curve von *Hesse* die Gerade P dreimal genommen.

5. Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, dasz, wenn das Netz einen Kegelschnitt P^2 enthält, oder zwei Kegelschnitte P^2, R^2, es, damit es eine Fundamentalcurve gibt, notwendig ist, dasz sich die Kegelschnitte des Netzes als *einem* Dreieck conjugiert ansehen laszen, von dem alle drei oder nur zwei Seiten zusammenfallen, das heiszt, es ist im ersten Falle nötig, dasz alle Kegelschnitte des Netzes unter sich eine dreipunctige Berührung mit der gemeinschaftlichen Tangente P eingehen, und im zweiten Falle, dasz die Kegelschnitte des Netzes eine der Geraden P, R in dem Durchschnittspuncte derselben berühren, und in Bezug auf die zweite einen festen Pol haben*). Wenn aber das Netz ein oder zwei Kegelschnitte enthält, die aus einem Paar zusammenfallender Geraden bestehen, und die obigen Bedingungen sind nicht erfüllt, so bilden die Kegelschnitte kein System erster Polaren. So bestimmen z. B. zwei Kegelschnitte, in Bezug auf die zwei Puncte a, b einer Geraden P conjugiert sind, und der Kegelschnitt P^2 ein Netz, das keine Fundamentalcurve zuläszt. Die Curve von *Hesse* ist in diesem Falle aus der Geraden P und einem Kegelschnitt zusammengesetzt, der durch a und b geht.

6. Haben die Kegelschnitte des Netzes einen, zwei oder drei Puncte gemein, und existiert in den beiden ersten Fällen kein Kegelschnitt R^2, so gibt es eine Fundamentalcurve, die ein, zwei oder drei Doppelpuncte besitzt, das heiszt, sie ist im zweiten Falle das System einer Geraden und eines Kegelschnittes, im dritten das System dreier Graden.

Wenn aber die Kegelschnitte des Netzes sich in einem Puncte berühren, und in einem zweiten Puncte schneiden, so ist die Gerade, welche die beiden Puncte verbindet, zweimal genommen, ein Kegelschnitt des Netzes. In diesem Falle würde es also keine Fundamentalcurve dritter Ordnung geben.

7. Alles in Allem schlieszen wir also, dasz die Aufgabe: *„Gegeben ein Netz Kegelschnitte, man soll eine Fundamental-*

*) Die zweite Bedingung ist eine Folgerung aus der ersten, wenn man das Netz sich durch die Kegelschnitte P^2, R^2 und einen dritten Kegelschnitt bestimmt denkt, der P oder R im Puncte PR berührt.

curve dritter Ordnung finden, in Bezug auf welche die Kegelschnitte die Polaren der Puncte der Ebene sind", eine, und zwar eine einzige Auflösung zuläszt, sobald das Netz kein Paar zusammenfallende Gerade enthält. Gibt es drei solche Paare, so gibt es eine unbegrenzte Zahl von Auflösungen. Gibt es dagegen ein einziges Paar oder zwei zusammenfallende Geradenpaare, so ist das Problem entweder unmöglich oder unbestimmt.

In den Fällen aber, in denen es unendlich viele Lösungen gibt, wird die Aufgabe bestimmt, wenn man für einen Kegelschnitt des Netzes, der nicht aus einem Paar zusammenfallender Geraden besteht, beliebig den Pol bestimmt.

III.

Ueber Reihen von Kegelschnitten.

Schon in Nr. 111 *bis.* *) haben wir bemerkt, dasz bei Anwendung des allgemeinen Theorems in Nr. 85. zur Bestimmung der Kegelschnitte einer Reihe vom Index μ, welche eine gegebene Gerade berühren, die resultierende Zahl 2μ nicht blos die *wirklichen* Kegelschnitte umfaszt, die die Aufgabe lösen, sondern auch Systeme von zusammenfallenden Geraden. In der That schneidet ein beliebiger Kegelschnitt der Reihe die gegebene Gerade in zwei Puncten; fallen diese zusammen, so löst der Kegelschnitt die Aufgabe. Diese beiden Puncte können nun aber nicht blos dann zusammenfallen, wenn wir einen wirklichen Kegelschnitt haben, der die gegebene Gerade berührt, sondern auch wenn in der Reihe ein Kegelschnitt existiert, der aus dem Systeme zweier Puncte besteht, da in letzterem Falle der Kegelschnitt als *Ort* betrachtet eine einfache Gerade ist, die aber zweimal gezählt ist, und folglich die beiden Durchschnittspuncte mit der gegebenen Geraden in einen Punct zusammenfallen.

*) Man sehe auch das *Giornale di Matematiche di Napoli:* tomo 1°. 1863, p. 225; tomo 2°., 1864, p. 17 und 192.

Man sieht nun leicht, dasz dergleichen Ausnahmekegelschnitte nicht blos in Specialfällen existieren, sondern auch in allgemeinen, weil, wenn eine Curve zweiter Classe sich in zwei Puncte auflösen soll, man nur einer Bedingung genüge zu leisten braucht. Eine Reihe von Kegelschnitten enthält daher im Allgemeinen eine bestimmte Anzahl von Systemen zweier zusammenfallender Geraden.

Es sei nun p die Zahl solcher Systeme, oder wenigstens die Zahl der Lösungen, die durch diese Systeme für die Aufgabe, eine Gerade zu berühren, sich ergeben, so ist die Zahl ν der wirklichen Kegelschnitte, welche die Aufgabe lösen, gleich $\nu = 2\mu - p$. Die Zahl p hängt von der Natur der vier gemeinschaftlichen Bedingungen ab, denen die Kegelschnitte der Reihe unterworfen sind, und kann für verschiedene Reihen auch verschiedene Werte haben, selbst wenn sie dieselben Indices haben. (Z. B. bilden sowol die einem Dreieck eingeschriebenen und eine vierte Gerade berührenden Kegelschnitte, als die einem Vierseit eingeschriebenen eine Reihe vom Index 2, aber im ersten Falle ist $p = 0$, im zweiten $p = 3$). Die Zahlen μ und p, von denen ν Function ist, sind von einander unabhängig und beide zur genauen Erklärung der Reihe notwendig, die man daher nicht mit dem einfachen Index μ bezeichnen darf, sondern mit den beiden Zahlen μ, p, sobald man bei der Bestimmung der Kegelschnitte, welche einer fünften gegebenen Bedingung genügen, diejenigen Lösungen ausschlieszen will, die den Systemen zweier zusammenfallender Geraden entsprechen.

Reciprok: Eine Reihe Kegelschnitte enthält im Allgemeinen eine bestimmte Zahl von Paaren nicht zusammenfallender Geraden. Ein beliebiger Kegelschnitt der Reihe wird von zwei Geraden berührt, die von einem gegebenen Puncte ausgehen. Fallen diese beiden Geraden zusammen, so schlieszt man, dasz der Kegelschnitt durch den gegebenen Punct geht. Aber dieses Zusammenfallen hat auch Statt, welches auch der gegebene Punct sei, wenn der Kegelschnitt ein Paar in einem Puncte sich kreuzender Geraden ist. Ist daher ν die Zahl der Kegelschnitte der Reihe, welche eine gegebene Gerade berühren, und q die Zahl der Kegelschnitte, die einen Doppelpunct haben, (Zahlen, mittelst deren man die Reihe definieren kann), so ist

die Zahl μ der wirklichen Kegelschnitte der Reihe, die durch einen gegeben Punct gehen, gleich $\mu = 2\nu + q$.

Von den Zahlen μ, ν, p, q können, da sie unter sich durch zwei lineare Gleichungen verbunden sind, zwei beliebige als unabhänge *Charakteristiken* dienen, um die Reihe zu bezeichnen. Es ist natürlich, zwei Charakteristiken zu wählen, die sich correlativ entsprechen, wie μ und ν. So hat *Chasles**) gethan, der zuerst gezeigt hat, dasz zur Definition einer Reihe nicht ein einziger Index genügt, sondern zwei unabhängige Variable nötig sind. Nun geben die obigen Gleichungen

$$p = 2\mu - \nu, \quad q = 2\nu - \mu$$

und lassen so erkennen, wieviel Punctpaare und wieviel Geradenpaare, das heiszt, wieviel Kegelschnitte mit Doppeltangenten und wieviel Kegelschnitte mit einem Doppelpunct in einer Reihe existieren, deren Charakteristiken μ und ν sind.

Gemäsz dem in Nr. 111 *bis*. schon bewiesenen Satze hat man für einen Kegelschnitt,

der durch	4	Puncte	geht	. . . .			$\mu = 1$, $\nu = 2$;
„ „	3	„	„	und	1	Gerade berührt	$\mu = 1$, $\nu = 4$;
„ „	2	„	„	„	2	„ „	$\mu = 4$, $\nu = 4$;
„ „	1	„	„	„	3	„ „	$\mu = 4$, $\nu = 2$;
				der	4	„ „	$\mu = 2$, $\nu = 1$.

Sind die vier Bedingungen von anderer Natur, so dienen die zahlreichen und zum grössten Teile neuen Theoreme die *Chasles* neuerlich ausgesprochen hat, und die eine ausgebreitete und sehr wichtige Theorie der Kegelschnitte bilden, zu der Bestimmung der Charakteristiken**). Wir werden hier einige Beispiele geben:

Lehrsatz I. *Der Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte der Reihe* (μ, ν) *ist eine Curve der* ν*-ten Ordnung.*

*) Comptes rendus, 15. février 1864.

**) Comptes rendus, 15. février, 7. mars, 27. juin, 4. et 18. juillet, 1er et 22. août, 1864.

Denn nur diejenigen Pole liegen auf der Geraden, welche Kegelschnitten entsprechen, die dieselbe Gerade berühren; diese trifft also den Ort in so viel Puncten, als es Kegelschnitte gibt, die sie berühren.

Lehrsatz II. (Correlat zu I.) *Die Polaren eines gegebenen Punctes in Bezug auf die Kegelschnitte der Reihe* (μ, ν) *umhüllen eine Curve der* μ*-ten Classe.*

Lehrsatz III. *Der Ort eines Punctes, dessen Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt der Reihe* (μ, ν) *mit der geraden Polare desselben Punctes in Bezug auf eine Curve* K m*-ter Ordnung zusammenfällt, die einen* r*-fachen Punct* o *mit* s *in eine Gerade* R *zusammenfallenden Tangenten hat, ist eine Curve der* $[\mu(m-1)+\nu]$*-ten Ordnung mit* $\mu(r-1)$ *durch* o *gehenden Zweigen, von welchen* $\mu(s-1)$ *die Gerade* R *berühren. Letztere hat in* o *mit dem Orte* $\mu.r$ *gemeinschaftliche Puncte.*

Es sei L eine beliebige Transversale und a ein beliebiger Punct von L. Die gerade Polare von a in Bezug auf K hat dann ihre Pole in Bezug auf die Kegelschnitte der Reihe nach Lehrsatz I. auf einer Curve ν-ter Ordnung liegen, die L in ν Puncten a' schneidet. Nimmt man umgekehrt beliebig auf L den Punct a', so bilden nach Lehrsatz II. die geraden Polaren von a' in Bezug auf die Kegelschnitte der Reihe eine Curve der μ-ten Classe die $\mu(m-1)$ gemeinschaftliche Tangenten mit der Curve $(m-1)$-ter Classe hat, der Einhüllenden der geraden Polaren der Puncte von L in Bezug auf K. (Nr. 81 *a.*). Diese Tangenten bestimmen auf L ebenso viele Puncte a, und da a ein Punct des Ortes ist, sobald er mit einem der entsprechenden Puncte a' zusammenfällt, so enthält L $\mu(m-1)+\nu$ Puncte des gesuchten Ortes.

Geht L durch o, so umhüllen nach Nr. 81 *b.* die geraden Polaren ihrer Puncte in Bezug auf K eine Curve der $(m-r)$-ten Classe. Der Punct o ist also der Ort für $\mu(r-1)$ Durchschnittspuncte, das heiszt, durch o gehen $\mu(r-1)$ Zweige des Ortes. Die Tangenten an diese $\mu(r-1)$ Zweige sind offenbar die harmonischen Axen des Büschels der ν Tangenten von K in Bezug auf die μ Geraden, welche in o die μ Kegelschnitte der Reihe berühren, die durch diesen Punct gehen. Daraus folgt

nach Nr. 19., dasz, wenn eine Gerade R s Zweige von K berührt, sie auch $\mu(s-1)$ Zweige des Ortes berührt.

Nimmt man nun an Stelle der beliebigen Transversale L die Gerade R an, die s Zweige von K berührt, so werden die geraden Polaren in Bezug auf K der Puncte von L von einer Curve der $[m-(r+1)]$-ten Classe umhüllt, das heiszt, o stellt in diesem Falle $\mu.r$ Durchschnittspuncte von L und dem Orte vor. Dieser Ort hat daher $m[\mu(m-1)+\nu]-\mu[r(r-1)+s-1]$ Durchschnittspuncte mit der Curve K auszer o. Diese Zahl kann auch so ausgedrückt werden: $\mu n+\nu m$, wenn nur n die Classe von K ist. Daraus folgert man:

Lehrsatz IV. *In einer Reihe* (μ, ν) *gibt es* $\mu n+\nu m$ *Kegelschnitte, die eine gegebene Curve m-ter Ordnung und n-ter Classe berühren.*

Lehrsatz V. *Der Ort der Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen Tangenten einer Curve* K *der n-ten Classe und der Kegelschnitte einer Reihe* (μ, ν) *ist von der Ordnung* $(2n-1)\nu$.

Eine beliebige Tangente von K berührt nämlich ν Kegelschnitte der Reihe, und wird von andern $(2n-1)\nu$ diesen Kegelschnitten und K gemeinschaftlichen Tangenten in $(2n-1)\nu$ Puncten geschnitten, die dem Orte angehören.

Lehrsatz VI. (Correlat zu V.) *Die gemeinschaftlichen Sehnen einer Curve m-ter Ordnung und der Kegelschnitte einer Reihe* (μ, ν) *werden von einer Curve der* $(2m-1)\mu$-*ten Classe umhüllt.*

Lehrsatz VII. *Der Ort der Berührungspuncte der Tangenten, die von einem gegebenen Puncte o an die Kegelschnitte einer Reihe* (μ, ν) *gezogen sind, ist eine Curve der* $(\mu+\nu)$-*ten Ordnung, die* μ-*mal durch o geht.*

Dieser Lehrsatz ist so unmittelbar klar, dasz er keines Beweises bedarf. Sein Correlat ist:

Lehrsatz VIII. *Die Tangenten der Kegelschnitte einer Reihe* (μ, ν) *in den Puncten, wo diese von einer gegebenen Geraden geschnitten werden, werden von einer Curve*

$(\mu + \nu)$-ter Classe umhüllt, die die gegebene Gerade in ν Puncten berührt.

Diese Curve hat $n(\mu + \nu)$ gemeinschaftliche Tangenten mit einer Curve der n-ten Classe, folglich entsteht:

Lehrsatz IX. *Die Berührungspuncte der Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν) mit den gemeinschaftlichen Tangenten, die sie mit einer Curve n-ter Classe haben, liegen auf einer Curve der $n(\mu + \nu)$-ten Ordnung.*

Und hiervon das Correlat:

Lehrsatz X. *Die Tangenten an die Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν) in den Puncten, wo diese von einer Curve m-ter Ordnung geschnitten werden, umhüllen eine Curve der $m(\mu + \nu)$-ten Classe.*

Lehrsatz XI. *Die Zahl der Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν), die einen gegebenen Abschnitt ab harmonisch teilen, ist μ, und die Zahl der Kegelschnitte derselben Reihe, für welche zwei gegebene Gerade A, B conjugiert sind, ist ν.*

Denn die Polaren von a werden nach Lehrsatz II. von einer Curve μ-ter Classe umhüllt, die μ in b sich schneidende Tangenten hat, und die Pole von A liegen nach Lehrsatz I. auf einer Curve ν-ter Ordnung, die ν Puncte auf B hat.

Ebenso lässt sich sehr leicht beweisen:

Lehrsatz XII. *Zieht man von jedem Puncte a einer Geraden L Gerade nach den Polen einer Geraden D in Bezug auf die Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν), die durch a gehen, so werden diese Geraden von einer Curve $(\mu + 2\nu)$-ter Classe umhüllt, welche 2ν-mal L berührt.*

Daraus folgt:

Wenn man von einem gegebenen Puncte Gerade nach den Polen einer festen Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν) zieht, so liegen die Durchschnittspuncte dieser Geraden mit den Kegelschnitten auf einer Curve $(\mu + 2\nu)$-ter Ordnung.

Lehrsatz XIII. *Legt man durch die Pole p einer Geraden D in Bezug auf die Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν) conjugierte Geradenpaare pa, pa' in der Art, dass pa durch einen festen Punct o geht, so umhüllt die Gerade pa' eine Curve der $(\mu+\nu)$-ten Classe, für welche D eine ν-fache Tangente ist.*

D berührt ν Kegelschnitte der Reihe, nimmt man nun einen Berührungspunct als Punct p an, und zieht die Grade pa, so so ist diese zu D conjugiert, und D stellt daher ν Tangenten vor.

Es sei nun i ein beliebiger Punct, und man ziehe durch ihn eine beliebige Gerade ia_1, die D in a_1 schneidet. Dann enthält ia_1 nach Lehrsatz I. ν Pole von D, und verbindet man diese mit o, so schneiden die zu den Verbindungsgeraden conjugierten Geraden D in ν Puncten a'; das beiszt, dem Puncte a_1 entsprechen ν Puncte a'. Nimmt man umgekehrt den Punct a' beliebig auf D an, so umhüllen seine Polaren eine Curve der μ-ten Classe (nach Lehrsatz II.), und es gehen also μ Polaren durch o. Die Geraden, die man durch die Pole von D in Bezug auf die μ entsprechenden Kegelschnitte nach i zieht, schneiden D in μ Puncten a_1. Es gibt also $\mu+\nu$ Gerade ia_1 deren jede mit einer der entsprechenden ia' zusammenfällt, folglich u. s. w.

Lehrsatz XIV. *Zieht man durch jeden Punct a einer Geraden D Gerade nach den Polen einer andern Geraden D' in Bezug auf die Kegelschnitte einen Reihe (μ, ν), die durch a gehen, so liegen die Puncte, in welchen diese Geraden die Kegelschnitte schneiden, auf einer Curve $(\mu+2\nu)$-ter Ordnung, für welche der Punct DD' ein μ-facher ist.*

Der Punct DD' ist μ-fach, weil durch ihn μ Kegelschnitte der Reihe gehen, und er, wenn man ihn mit den entsprechenden Polen von D' verbindet, μ Gerade liefert, welche dieselben Kegelschnitte in dem obigen Puncte schneiden. Auszerdem schneidet D ν Kegelschnitte, deren Pole auf D liegen, in 2ν Puncten, und folglich u. s. w.

Lehrsatz XV. *Zieht man durch einen Punct o Tangenten an die Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν), so werden die Geraden, welche von den Berührungspuncten nach*

den Polen einer gegebenen Geraden D gezogen sind, von einer Curve der $(2\mu+\nu)$*-ten Classe umhüllt.*

Durch o gehen μ Kegelschnitte der Reihe, und also auch ebensoviele Gerade, die nach den entsprechenden Polen von D gezogen sind. Auszerdem gehen durch o $\mu+\nu$ Tangenten der von den Tangenten der Kegelschnitte in den Puncten, wo sie von D geschnitten werden, umhüllten Curve (Lehrsatz VIII.). Folglich u. s. w. Es folgt noch:

Lehrsatz XVI. *Zieht man von einem festen Puncte Gerade nach den Polen einer gegebenen Geraden D in Bezug auf die Kegelschnitte einer Reihe* (μ, ν)*, so umhüllen die Tangenten in den Puncten, wo diese Geraden die Kegelschnitte schneiden, eine Curve* $(2\mu+\nu)$*-ter Classe, für welche D eine* ν*-fache Tangente ist.*

Lehrsatz XVII. *Zieht man durch den Pol p einer Geraden D in Bezug auf jeden Kegelschnitt einer Reihe* (μ, ν) *zwei Gerade pa, pa', deren erste durch einen festen Punct o geht, und die einen gegebenen Abschnitt ef der Geraden D in einem gegebenen Doppelverhältnisz schneiden, so umhüllt die Gerade pa' eine Curve der* 2ν*-ten Classe, für welche oe, of und D* ν*-fache Tangenten sind.*

Die einzigen Tangenten durch o sind nämlich oe und of und jede derselben repräsentiert ν-mal die Gerade pa' in Folge der ν Pole, die sie enthält. Auch D repräsentiert ν Gerade pa', wegen der ν Kegelschnitte, die sie berührt.

Lehrsatz XVIII. *Zieht man für jeden Kegelschnitt einer Reihe* (μ, ν) *durch den Pol p einer gegebenen Geraden D zwei conjugierte Gerade pa, pa', die einen gegebenen Abschnitt ef von D in einem gegebenen anharmonischen Verhältnisz schneiden, so umhüllt jede dieser Geraden eine Curve* $(\mu+\nu)$*-ter Classe, für welche D eine* ν*-fache Tangente ist.*

D ist eine ν-fache Tangente in Folge der ν Kegelschnitte, die sie berührt. Auszerdem gehen durch jeden Punct a von D μ Gerade pa, weil a auf D einen andern Punct a' mittelst der Bedingung bestimmt, dasz das Doppelverhältnisz $(efaa')$

gegeben sei, und folglich μ Kegelschnitte existieren, die nach Lehrsatz XI. aa' harmonisch teilen; folglich u. s. w.

Lehrsatz XIX. *Zieht man durch den Pol p einer gegegebenen Geraden D in Bezug auf jeden Kegelschnitt der Reihe (μ, ν) zwei conjugierte Gerade pa, pa', die einen Abschnitt ef von D in einem gegebenen Doppelverhältnisz schneiden, so schneiden die Geraden pa und pa' die Kegelschnitte in Puncten, die auf zwei Curven der $(2\mu+3\nu)$-ten Ordnung liegen.*

Wir müszen nachweisen, dasz auf einer beliebigen Geraden L von den Durchschnittspuncten der Kegelschnitte mit den Geraden pa $2\mu+3\nu$ liegen. Man nehme auf D einen beliebigen Punct a und bestimme dann a' der Art, dasz das Doppelverhältnisz $(efaa')$ den gegebenen Wert habe. Durch a' ziehe man die Tangenten an die Kegelschnitte, dann enthält L nach Lehrsatz VII. $\mu+\nu$ Berührungspuncte und die Geraden, die von diesen Puncten nach den Polen der $\mu+\nu$ entsprechenden Kegelschnitte gezogen sind, treffen D in $\mu+\nu$ Puncten a_1. Nimmt man umgekehrt auf D beliebig den Punct a_1, so gehen durch ihn $\mu+2\nu$ Gerade, deren jede den Pol der Geraden D in Bezug auf einen Kegelschnitt der Reihe mit einem Puncte a, der diesem und der Geraden L gemeinschaftlich ist, verbindet (Lehrsatz XII.). Die $\mu+2\nu$ Tangenten der Kegelschnitte in den Puncten a treffen D in $\mu+2\nu$ Puncten a', denen ebensoviele Puncte a entsprechen, bestimmt durch das gegebene Doppelverhältnisz. Es wird also $(\mu+\nu)+(\mu+2\nu)$ Puncte a geben, die mit einem der entsprechenden Puncte a_1 zusammenfallen, oder u. s. w.

Lehrsatz XX. *Der Ort eines solchen Punctes x, dasz die Tangente, die in ihm an einen Kegelschnitt der Reihe (μ, ν), der durch x geht, gelegt ist, und die gerade Polare von x in Bezug auf eine Curve K der m-ten Ordnung, welche einen r-fachen Punct o mit s in die Gerade R zusammenfallenden Tangenten hat, sich auf einer festen Geraden D schneiden, ist eine Curve der $(m\mu+\nu)$-ten Ordnung mit $\mu(r-1)$ Zweigen, die durch o gehen und mit $\mu(s-1)$ mit R zusammenfallenden Tangenten. Letztere Gerade hat in o mit dem Orte $\mu.r$ Puncte gemein.*

Wir müszen untersuchen, wieviele Puncte des Ortes auf einer Geraden L liegen. Nimmt man beliebig in D den Punct a an, so gehen durch ihn nach Lehrsatz VII. $\mu+\nu$ Tangenten von Kegelschnitten der Reihe, deren Berührungspuncte auf L liegen. Die geraden Polaren dieser Puncte in Bezug auf K treffen D in $\mu+\nu$ Puncten a'. Umgekehrt gehen durch einen Punct a' von D die geraden Polaren in Bezug auf K von $m-1$ Puncten von L, den Durchschnittspuncten von L mit der ersten Polare von a'. Durch diese Puncte gehen $\mu(m-1)$ Kegelschnitte der Reihe, deren Tangenten auf D ebensoviele Puncte a bestimmen. L zählt daher für $\mu+\nu+\mu(m-1)=\mu m+\nu$ Puncte des Ortes.

Die Ordnung des Ortes lässt sich auch unmittelbar bestimmen, wenn man beachtet, dasz er μ-mal durch jeden Punct geht, in denen D die Curve K schneidet und auszerdem durch die Puncte, in denen D Kegelschnitte der Reihe berührt.

Geht L durch den r-fachen Punct o, so hat die erste Polare von a' in o einen $(r-1)$-fachen Punct, schneidet also L nur noch in andern $m-r$ Puncten. Dadurch kommt also, dasz L auszer o nicht mehr als $\mu+\nu+\mu(m-r)$ Puncte des Ortes enthält, das heiszt, $\mu(r-1)$ Zweige des Ortes gehen durch o.

Die Tangenten der $\mu(r-1)$ Zweige des Ortes in o sind offenbar die Tangenten an die ersten Polaren der μ Puncte, in denen D von den Tangenten an die μ Kegelschnitte der Reihe, die durch o gehen, geschnitten wird. Daraus folgt, dasz, wenn K in o s Zweige hat, die eine und dieselbe Gerade berühren, diese $s-1$ Zweige jeder ersten Polare berühren musz, also $\mu(s-1)$ Zweige des Ortes.

Ist L in o die gemeinschaftliche Tangente der s Zweige von K, so berührt sie $s-1$ Zweige der ersten Polare von a', die L in noch weiteren $m-r-1$ Puncten schneidet. L enthält also noch $\mu+\nu+\mu(m-r-1)$ Puncte des Ortes, das heiszt, o repräsentiert in diesem Falle $\mu . r$ Durchschnittspuncte von L mit demselben Orte.

Aus diesem Satze kann man augenblicklich den Lehrsatz IV. erschlieszen.

U. s. w., u. s. w.

In den meisten Theoremen, die *Chasles* gegeben hat, bemerkt man folgende stets wiederkehrende Eigenschaft, dasz die Zahl der Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν), welche einer fünften gegebenen Bedingung genügen, durch ein Binom von der Form $\alpha\mu + \beta\nu$ ausgedrückt ist, worin α, β von den Charakteristiken μ, ν unabhängige Zahlen sind, deren eine auch Null sein kann. Die Zahl $\alpha\mu + \beta\nu$ hat *Chasles* den *Modulus* der vorliegenden Bedingung genannt.

Der Lehrsatz IV. zeigt, dasz, wenn die fünfte Bedingung darin besteht, dasz eine Curve β-ter Ordnung und α-ter Classe berührt werden soll, der Modulus genau gleich $\alpha\mu + \beta\nu$ ist.

Folgendes ist die Methode, die *Chasles* angibt, um die Charakteristiken der Reihe zu berechnen, die durch die Kegelschnitte gebildet wird, welche vier gegebenen Bedingungen genügen sollen. Diese Bedingungen mögen durch die Symbole B_1, B_2, B_3, B_4 bezeichnet werden, und ihre Moduln seien $\alpha_1\mu + \beta_1\nu$, $\alpha_2\mu + \beta_2\nu$, $\alpha_3\mu + \beta_3\nu$, $\alpha_4\mu + \beta_4\nu$. Die Zahl der Kegelschnitte, die durch vier Puncte gehen und der Bedingung B_1 genügen, ist $\alpha_1 + 2\beta_1$, was wir folgendermaszen bezeichnen wollen:

$$Z(4p, B_1) = \alpha_1 + 2\beta_1 \text{ *)}.$$

Um ebenso auszudrücken, dasz die Zahl der Kegelschnitte, die durch drei Puncte gehen, eine Gerade berühren und der Bedingung B_1 genügen, gleich $2\alpha_1 + 4\beta_1$ ist, schreiben wir:

$$Z(3p, 1g, B_1) = 2\alpha_1 + 4\beta_1.$$

Dem analog hat man:

$$Z(2p, 2g, B_1) = 4\alpha_1 + 4\beta_1,$$
$$Z(1p, 3g, B_1) = 4\alpha_1 + 2\beta_1,$$
$$Z(4g, B_1) \quad = 2\alpha_1 + \beta_1.$$

Das heiszt, die Kegelschnitte, die durch drei Puncte gehen

*) Der Herr Verfaszer macht mich in der diese Note begleitenden Zuschrift auf die für die deutsche Uebersetzung höchst zweckmäszig gewählte Bezeichnung: p = Punct, g = Gerade, B = Bedingung, Z = Zahl aufmerksam. D. Uebers.

und der Bedingung B_1 genügen, bilden eine Reihe, deren Charakteristiken $\mu = \alpha_1 + 2\beta_1$, $\nu = 2\alpha_1 + 4\beta_1$ sind, was wir auf folgende Weise bezeichnen wollen:

$$(3p, B_1) \equiv (\alpha_1 + 2\beta_1,\ 2\alpha_1 + 4\beta_1);$$

und dem analog:

$$(2p, 1g, B_1) \equiv (2\alpha_1 + 4\beta_1,\ 4\alpha_1 + 4\beta_1);$$

$$(1p, 2g, B_1) \equiv (4\alpha_1 + 4\beta_1,\ 4\alpha_1 + 2\beta_1);$$

$$(3g, B_1) \qquad \equiv (4\alpha_1 + 2\beta_1,\ 2\alpha_1 + \beta_1).$$

Ist nun $\alpha_2\mu + \beta_2\nu$ der Modulus der Bedingung B_2, so haben wir:

$$Z(3p, B_1B_2) \qquad = \alpha_2(\alpha_1 + 2\beta_1) + \beta_2(2\alpha_1 + 4\beta_1),$$

$$Z(2p, 1g, B_1B_2) = \alpha_2(2\alpha_1 + 4\beta_1) + \beta_2(4\alpha_1 + 4\beta_1),$$

$$Z(1p, 2g, B_1B_2) = \alpha_2(4\alpha_1 + 4\beta_1) + \beta_2(4\alpha_1 + 2\beta_1),$$

$$Z(3g, B_1B_2) \qquad = \alpha_2(4\alpha_1 + 2\beta_1) + \beta_2(2\alpha_1 + \beta_1);$$

aus denen folgt:

$$(2p, B_1B_2)$$
$$\equiv (\alpha_1\alpha_2 + 2(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 4\beta_1\beta_2,\ 2\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 4\beta_1\beta_2),$$

$$(1p, 1g, B_1B_2)$$
$$\equiv (2\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 4\beta_1\beta_2,\ 4\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 2\beta_1\beta_2),$$

$$(2g, B_1B_2)$$
$$\equiv (4\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 2\beta_1\beta_2,\ 4\alpha_1\alpha_2 + 2(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + \beta_1\beta_2).$$

Nehmen wir jetzt noch die Bedingung B_3 hinzu, so erhalten wir:

$$Z(2p, B_1B_2B_3) \quad = \quad \alpha_3\{\alpha_1\alpha_2 + 2(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 4\beta_1\beta_2\}$$
$$+ \beta_3\{2\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 4\beta_1\beta_2\},$$

$$Z(1p, 1g, B_1B_2B_3) = \quad \alpha_3\{2\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 4\beta_1\beta_2\}$$
$$+ \beta_3\{4\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 2\beta_1\beta_2\},$$

$$Z(2g, B_1B_2B_3) \quad = \quad \alpha_3\{4\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 2\beta_1\beta_2\}$$
$$+ \beta_3\{4\alpha_1\alpha_2 + 2(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + \beta_1\beta_2\};$$

woraus man erhält:

$$(1p,\, B_1B_2B_3) \equiv (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 4\beta_1\beta_2\beta_3,\; 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_1\beta_2\beta_3),$$

$$(1g,\, B_1B_2B_3) \equiv (2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_1\beta_2\beta_3,\; 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_3).$$

Hieraus ergeben sich die zwei Zahlen:

$$Z(1p,\, B_1B_2B_3B_4), \qquad Z(1g,\, B_1B_2B_3B_4),$$

die genau die Charakteristiken der Reihe sind, die durch Kegelschnitte gebildet wird, welche den vier Bedingungen B_1, B_2, B_3, B_4 genügen. Für diese Reihe sind folglich die Charakteristiken:

$$\mu = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4 + 2\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4,$$

$$\nu = 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 + 2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4.$$

Nimmt man endlich eine fünfte Bedingung B_5, deren Modulus $\alpha_5\mu + \beta_5\nu$ sei, so ist die Zahl der Kegelschnitte, die den fünf Bedingungen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 genügen, gleich:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5 + 2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5.$$

Speciell ist dies die Zahl der Kegelschnitte, die fünf gegebene Curven berühren, deren Ordnungszahlen bezüglich β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, und deren Classen α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 sind (M. s. Nr. 111 *bis* Theorem XV.).

Wie eine *Reihe* von Kegelschnitten, die vier gemeinschaftlichen Bedingungen genügen, sich mittelst zweier unabhängiger Charakteristiken bestimmen läszt, so kann man ein *System* von Kegelschnitten, die nur drei gemeinschaftlichen Bedingungen B_1, B_2, B_3 genügen, mittelst dreier Zahlen λ, μ, ν definieren, deren Bedeutung durch

$$Z(2p, 3B) = \lambda, \quad Z(1p, 1g, 3B) = \mu, \quad Z(2g, 3B) = \nu$$

gegeben sind, und man kann also die symbolische Gleichung aufstellen

$$(3B) \equiv (\lambda, \mu, \nu).$$

Aus der oben für die Zahl der Kegelschnitte, welche fünf Bedingungen genügen, gefundenen Formel, leitet man die Werthe von λ, μ, ν als Functionen der Coefficienten (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), der Moduli der drei Bedingungen B_1, B_2, B_3 ab, nämlich

$$\begin{aligned}\lambda &= \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B} + 4\mathfrak{C} + 4\mathfrak{D},\\ \mu &= 2\mathfrak{A} + 4\mathfrak{B} + 4\mathfrak{C} + 2\mathfrak{D},\\ \nu &= 4\mathfrak{A} + 4\mathfrak{B} + 2\mathfrak{C} + \mathfrak{D},\end{aligned}$$

worin der Kürze wegen

$$\mathfrak{A} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \mathfrak{B} = \Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3, \quad \mathfrak{C} = \Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3, \quad \mathfrak{D} = \beta_1\beta_2\beta_3$$

gesetzt ist.

Ist W das Symbol einer doppelten Bedingung und auszerdem

$$(2p, W) \equiv (x, y), \quad (1p, 1g, W) \equiv (y, z), \quad (2g, W) \equiv (z, u);$$

und führt man in diese Reihen nach der oben auseinandergesetzten Methode von *Chasles* nach und nach die Bedingungen B_1, B_2, B_3 ein, so findet man

$$Z(3B, W) = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C} + u\mathfrak{D}.$$

Setzt man nun

$$x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C} + u\mathfrak{D} = a\lambda + b\mu + c\nu,$$

das heiszt:

$$a+2b+4c=x,\quad 2a+4b+4c=y,$$
$$4a+4b+2c=z,\quad 4a+2b+c=u;$$

so hat man zwischen den Grössen x, y, z, u die Relation:

$$(1)\qquad 2x-3y+3z-2u=0$$

und für a, b, c die Werte:

$$(2)\left\{\begin{array}{l} 4a=2u-z,\qquad 4c=2x-y,\\ 8b=2(2y-z)-3(2x-y)=2(2z-y)-3(2u-z).\end{array}\right.$$

Für jeden Specialfall ist es nicht schwer die Zahlen x, y, z, u zu bestimmen, dann liefern aber die (2) die Grössen a, b, c, und so gelangt man zu der Zahl der Kegelschnitte, welche drei einfachen und einer doppelten Bedingung genügen, nämlich

$$Z(3B,W)=a\lambda+b\mu+c\nu\ ^{*)}.$$

Beispiel I. Die doppelte Bedingung sei die doppelte Berührung mit einer gegebenen Curve W der m-ten Ordnung und n-ten Classe, die δ Doppelpuncte, $\varkappa$ Spitzen, τ Doppeltangenten und ι Wendepuncte hat. Nach Nr. 103. ist die Zahl x der Kegelschnitte, die durch drei gegebene Puncte gehen und eine doppelte Berührung mit W haben, gleich der Zahl der Doppelpuncte einer Curve $(2m+n)$-ter Ordnung, $2m$-ter Classe, mit $\delta+\frac{3}{2}m(m-1)$ Doppeltangenten, folglich ist nach Nr. 100. Gleich. (7)

$$2x=2\delta+3m(m-1)+n(4m+n-9).$$

Es ist ferner evident, dass die Zahl der Kegelschnitte der Reihe $(2p, W)$, die aus einem Paar Puncten bestehen, gleich ist:

$$2x-y=2m(m-1)$$

also

$$y=2\delta+m(m-1)+n(4m+n-9).$$

Die Zahlen z, u sind die Correlate von y und x, also gleich

$$z=2\tau+n(n-1)+m(4n+m-9),$$
$$2u=2\tau+3n(n-1)+m(4n+m-9).$$

*) M. s. d. *Comptes rendus*, 7. novembre 1864, p. 776.

Der Relation (1) wird genügt, und die Gleichungen (2) geben:

$$4a = 2n(n-1), \qquad 4c = 2m(m-1),$$

$$8b = 8mn - (m^2 + n^2) - 7(m+n) + 2(\delta + \tau),$$

oder auch nach Nr. 99., Gleichung (1) und (2):

$$8b = 8mn - 9(m+n) - 3(\varkappa + \iota).$$

Die Zahl der Kegelschnitte des Systems (λ, μ, ν) also, welche eine doppelte Berührung mit der Curve W eingehen, ist:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)\lambda + \tfrac{1}{8}[8mn - 9(m+n) - 3(\varkappa + \iota)]\mu + \tfrac{1}{2}m(m-1)\nu.$$

Beispiel 2. Die doppelte Bedingung sei eine dreipunctige Berührung mit der Curve W. Die Zahl x ist in diesem Falle nach Nr. 103. gleich der Zahl der Spitzen einer Curve der $(2m+n)$-ten Ordnung, $2m$-ter Classe, mit $\varkappa$ Wendepuncten; folglich nach Nr. 100. Gleichung (5) gleich:

$$x = 3n + \varkappa.$$

In der Reihe $(2p, W)$ können keine Kegelschnitte existieren, die aus zwei Puncten bestehen, folglich ist

$$2x - y = 0,$$

also

$$y = 2(3n + \varkappa),$$

und hiervon die Correlate

$$s = 2(3m + \iota), \qquad u = 3m + \iota.$$

Der Gleichung (1) ist genügt, da man nach Nr. 100. Gleichung (5) identisch

$$3n + \varkappa = 3m + \iota$$

hat, und die Gleichungen (2) geben:

$$a = 0, \qquad b = \tfrac{1}{2}(3m + \iota), \qquad c = 0.$$

Folglich ist die Zahl der Kegelschnitte des Systems (λ, μ, ν), die eine dreipunctige Berührung mit der Curve W eingehen, gleich

$$\tfrac{1}{2}(3m + \iota)\mu \qquad \text{oder} \qquad \tfrac{1}{2}(3n + \varkappa)\mu.$$

Beispiel 3. Der doppelten Bedingung substituieren wir jetzt zwei einfache Berührungen mit zwei Curven V, V' von den Ordnungen m, m', und den Classen n, n'. Die Zahl x ist in diesem Falle nach Nr. 103. gleich der Zahl der Durchschnittspuncte zweier Curven $(2m+n)$-ter und $(2m'+n')$-ter Ordnung. Folglich ist

$$x = 4mm' + 2(mn' + m'n) + nn'.$$

In der Reihe $(2p, V, V')$ ist die Zahl der Kegelschnitte, die aus einem Paar Puncte bestehen nach Nr. 111 *bis*.

$$2x - y = 4mm',$$

und hieraus erhält man

$$y = 4mm' + 4(mn' + m'n) + 2nn',$$

und als Correlate

$$z = 4nn' + 4(mn' + nm') + 2mm',$$

$$u = 4nn' + 2(mn' + nm') + mm'.$$

Diesen Werten gemäsz, die der Relation (1) genügen, geben die Gleichungen (2)

$$a = nn', \qquad b = mn' + nm', \qquad c = mm'.$$

Folglich ist die Zahl der Kegelschnitte des Systems (λ, μ, ν), welche zwei Curven V, V' berühren, gleich

$$nn'\lambda + (mn' + nm')\mu + mm'\nu.$$

Mit der eben auseinandergesetzten Methode kann man auch die Charakteristiken λ, μ, ν eines Systemes (B, W) von Kegelschnitten, die einer einfachen und einer doppelten Bedingung unterworfen sind, bestimmen. Darauf kann man eine neue Doppel-Bedingung W' einführen und gelangt so zur Bestimmung der Charakteristiken der Reihe (W, W') und zu der Zahl $Z(B, W, W')$ der Kegelschnitte die einer einfachen Bedingung und zwei Doppel-Bedingungen Genüge leisten.

Druckfehler.

Die nachfolgenden Druckfehler, die ich zum grossen Teile der genauen Revision der Uebersetzung durch den Herrn Verfasser verdanke, namentlich da, wo eine vielleicht nicht ganz klare Stelle, in einer etwas veränderten Art zu übersetzen ist, bitte ich vor dem Gebrauche des Buches verbessern zu wollen. Manche der Verbesserungen sind jedoch, obwohl durch den Sinn selbst nicht gefordert, nur auf Wunsch des Herrn Verfassers aufgenommen, einzelne, die zum Teil die Feinheiten der Sprache betrafen, wie die Aenderung *denn* für das begründende *nämlich*, habe ich ganz unterdrückt.

Seite.	Zeile.	Für:	setze:
4	1 v. U.	$(abcd) + (acdb)$	$(abcd) + (acbd)$
5	11 v. O.	$(acdb) = 1 - \lambda$	$(acbd) = 1 - \lambda$
7	17 v. O.	a', b', c', d'.	a', b', c'.
11, 12, 13, 14	. . . . . .	jm und ja	im und ia
12	3 v. O.	$\frac{k . jc}{ja . jc}$	$\frac{k . ac}{ia . ic}$
17	7 v. O.	$\Sigma\left(\frac{aa}{ma}\right)_{n-r}$	$\Sigma\left(\frac{oa}{ma}\right)_{n-r}$
19	2 v. O.	a_r	a_n
20	10 v. U.	m_n	m_{n-1}
23	7 v. O.	$(n-r-1)_2$	$(n-r+1)_2$
25	5 u. 10 v. U.	M'_r	$M'_{r'}$
25	10 v. U.	r-ten	r'-ten
31	9 v. U.	$\lambda' m-1$	λ'_{m-1}
33	3 v. U.	$ja . j'c$	$ia . j'c$
34	1 v. O.	j und j'	i und j'
37	11 v. O.	Ist $(abcd) = -1$.	Da $(abcd) = -1$ ist,

Seite.	Zeile:	Für:	setze:
40	17 v. U.	ein Punct	ein Teil
40	1 v. U.	Curven	Linien.
52	19 v. O.	ersten Grades statt haben	ersten Grades für jede der beiden Coordinaten statt haben
54	15 v. O.	$+\beta_1$	$-\beta_1$
58	15 v. O.	*Berühren*	*Schneiden*
58	4 v. U.	in ihrem zweiten	in dem
63	15 v. O.	$n < p$	$n > p$
64	4 v. O.	$\frac{1}{2}p(p+3)+p.q$	$\frac{1}{2}p(p-3)+p.q$
64	5 v. O.	$\frac{1}{2}q(q+3)+p.q$	$\frac{1}{2}q(q-3)+p.q$
66	11 v. O.	Diese letzten Puncte	Alle diese Puncte
73	3 v. U. Anm.	5me	3me
77	9 v. U.	wenn,	weil
78	6 v. U.	werden gleichzeitig auch auf der Curve $C_{n+n'}$ liegen	nehmen wir auf der Curve $C_{n+n'}$ an
79	15 v. O.	$n'-\frac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2)$	$n'^2-\frac{1}{2}(n'-n+1)(n'-n+2)$
82	7 v. O.	und müssen jetzt auch die Zahl der Puncte bestimmen	und damit ist auch die Zahl der Puncte bestimmt
82	12 v. U.	$+(3n-2)$	$-(3n-2)$
88	18 v. O.	beide sind also	ausserdem sind beide
91	13 v. O.	Punct	Punct *o*
95	6 v. O.	der dritten	*n*-ter
101	11 v. O.	und	das heisst,
101	14 v. O.	und dass gleichzeitig	oder auch, was dasselbe ist, dass
103	4 v. O.	und die $n-1$	Und das System der $n-1$
107	1 v. O.	der Ort .... ist	die Stelle .... vertritt
110	8 u. 9 v. U.	die $(r+1)$-te Polare von *o* durch *o'* gehen und	da die $(r+1)$-te Polare von *o* durch *o'* geht,
112	5 v. U.	Polare von *o* hat	Polare von o_1 hat folglich
115	9 v. O.	$(n-1)-(r-1)-(s-1)$	$(n-1)-(r-1)-1$
115	12 v. O.	$n-(r+s-1)$	$n-(r+1)$
120	14 v. U.	auf jede	auf irgend eine
121	12 v. O.	auf die Curven	auf irgend eine Curve
124	3 v. U.	*oo'*	*oo''*
127	8 v. U.	der Curven	einer Curve
128	4 v. O.	Polaren	Pole
130	7 v. O.	$m = 1$	$m_2 = 1$.
134	1 v. O.	$(m-1)^2$	$(m-1)$
137	1 v. O.	57 *b.*	51 *b.*
137	3 v. O.	57 *d.*	51 *d.*

Seite.	Zeile:	Für:	setze:
138	10 v. O.	Rückkehrtangente	Rückkehrtangente T
138	16 v. O.	ist sie jedesmal	ist sie
138	10 v. U.	daher	daher nach Nr. 51 *e*.
140	3 v. O.	i	o
146	6 v. U.	$-\gamma_x$	$+\gamma_x$
147	8 v. O.	$2\delta - 3x$	$2\delta + 3x$
147	17 v. U.	so dass	weil
151	2 v. O.	so besteht unter den Abschnitten oa' u. s. w. . . . . . $(n-r)$-ten Grades	so besteht unter den Abschnitten oa und oa' eine Gleichung, die für oa' vom r-ten für oa vom $(n-r)$-ten Grade ist.
151	7 v. O.	für oa' zwei gleiche Werte hat	zwei Werte von oa' darbiete
152	12 v. O.	i	k
152	16 v. U.	$(n-r)$-te	$(r-1)$-te
152	5 v. U.	und es ist folglich	da
154	5—6 v. O.	berührt C_m in m Puncten	schneidet C_m in $2m$ Puncten.
154	7 v. O.	$2n(n-1)$	$2m(n-1)$
164	4 v. O.	K	K'
172	9 u. 4 v. U.	durch einen beliebigen Punct dieser Geraden gehen	aus zwei Puncten bestehen.
178	17 v. O.	so gilt der Satz	Daher gilt der Satz
178	10 v. U.	berührt. Die Gerade ist also die Indicatrix	berührt, weil die Gerade die Indicatrix . . . . ist,
180	18 v. U.	Punctes	Punctes p.
180	3 v. U.	dieser Geraden	dieses Kegelschnittes.
189	15 v. U.	diese Curve selbst	die *Hessesche* Curve
189	16 v. U.	letztere Curve	diese Polare
190	10 v. U.	in den	in denen
191	5 v. U.	der	das
193	7 v. U.	bewies	sprach aus
195	3 v. U.	$(n-1)^2$	$(n-2)^2$
198	7 v. U.	$(n-1)^2$	$(n-2)^2$
218	11 v. U.	dieser Kegelschnitt ist daher ein Paar in o' sich schneidende Gerade	weil dieser Kegelschnitt aus einem Paar in o' sich schneidenden Geraden besteht.
231	11 v. O.	dass heisst, n' und o' fallen auf einander	weil n' und o' aufeinanderfallen
237	13 v. U.	da ferner . . . . so dürfen . . . . substituieren	weil wir . . . . und also den Puncten . . . . . substituieren dürfen.

2

Seite.	Zeile:	Für:	setze:
239	7 v. U.	$\alpha = 2\beta$	$\alpha' = 2\beta$
245	11 v. O.	mit u	mit dem Tangentialpunct von u
250	2 v. O.	c	c_0
251	2 v. U. Anm.	den Geraden [01], [10]	der Geraden [01] [10]
256	8 v. O.	Nr. 57 *b*.	Nr. 51 *b*.
256	2 v. U.	nämlich	wirklich
270	12 v. U.	$3n(n-1)-2\delta+3\varkappa$	$3n(n-1)-2\delta-4\varkappa$
271	10 v. O.	$(r-1)(3r-1)$	$(r-1)(3r+1)$
272	3 v. U.	dreifachen Punct.	Doppelpunct

Seite 248 nach Nr. 148. füge man noch hinzu: Aus dem Vorhergehenden und Nr. 132*c*. folgt, dass drei beliebige von den vier Tangenten, welche an eine Curve dritter Ordnung C_3 von einem ihrer Puncte gezogen werden können, die geraden Polaren des Berührungspunctes der vierten Tangente in Bezug auf die drei syzigetischen Curven sind, deren Curve von *Hesse* die C_3 ist.

Druck der Königl. Universit.-Druckerei von F. W. Kunike in Greifswald.